T.C

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

KİMYA METALURJİ FAKÜLTESİ

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ

LEBESGUE İNTEGRALİ

FETHİ FIRAT TÜLÜ

13052068

MÜHENDİSLİK TASARIMI

DANIŞMAN

DR. ÖĞR. ÜYESİ YASEMEN UÇAN

İSTANBUL 2018

ÖNSÖZ

Tasarım çalışmam boyunca, bana yardımcı olan, yol gösteren, güler yüzünü eksik etmeyen tasarım danışmanım Sayın Dr. Öğr. Üyesi Yasemen UÇAN' a teşekkür ederim. Bu tasarım çalışmasının ortaya çıkmasında bana sürekli destek veren Mert Güneş'e teşekkür ederim. Eğitim-Öğretim hayatımda ve hayatımızın her anında yanımızda olan aileme teşekkürlerimi borç bilirim.

Aralık 2018
Fethi Fırat TÜLÜ

İÇİNDEKİLER

Sembol Listesi

σ	Sigma
$\mathcal{B}$	Borel Kümeleri
μ	Ölçüm
μ_*	İç Ölçüm
μ^*	Dış Ölçüm
f^+	f nin pozitif kısmı
f^-	f nin negative kısmı
(X, A, μ)	Ölçüm Uzayı
A'	A kümesinin yığılma noktaları
inf	İnfimum
sup	Supremum

Şekil Listesi

ÖZET

Bu tasarım çalışmasında Lebesgue integralleri incelenmiştir. Lebesgue integralini anlamak adına sırasıyla cebir, ölçümler, ölçülebilir fonksiyonlar incelenmiş son olarak Lebesgue integrali ile Riemann integrali karşılaştırılmıştır. Lebesgue integrallerinin Riemann integrallerinin sonuç vermediği denklemler üzerindeki başarımına dikkat çekilmek istenmiştir.

1. GİRİŞ

Bu araştırmanın hedefi, konusu ile Lebesgue integralleridir. Lebesgue integralleri, Analiz derslerinde öğretilen Riemann integrallerinden biraz daha kompleks ve karışık olduğundan bu integrali anlamak için öncelikle bilinmesi gereken belli başlı konular ve terimler bulunmaktadır. Bu terim ve konuları ele almak gerekmektedir. Bu tasarım çalışması da öncelikle cebirler konusunu ele alıp Sigma ve Borel cebrini ardından ölçüleri (iç, dış ölçüm) ve ölçülebilir fonksiyon konuları inceledikten sonra Lebesgue integralini daha iyi şekilde anlatmayı öngörmektedir.

2. CEBİR

Tanım: X kümesinin alt kümelerinden herhangi bir X in alt kümelerinin **sınıfı** denir.

Tanım: $\mathscr{K}$ sınıfı X kümesinin alt kümesinin boş olmayan bir sınıfı olmak üzere

A ve B $\mathscr{K}$ sınıfının elemanları ise;

- Her A ve B için $A \cup B \in \mathscr{K}$
- Her A ve B için $A \setminus B \in \mathscr{K}$

Özelliklerini sağladığı takdirde bu $\mathscr{K}$ sınıfına **halka** adı verilir. Eğer U özelliği yerine;

- Her $k \in N$ için $A_k \in \mathscr{K} \rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathscr{K}$ (kısaltma 1,1)

Şartı oluşuyorsa bu durumda $\mathscr{K}$ halkasına bir σ-halka denir.

Bu tanımlardan ışığında bir $\mathscr{K}$ halkası için

- $\emptyset \in \mathscr{K}$ için: Her $A \cap B \in \mathscr{K}$
- $k = 1,2, \ldots ,n$ için $A_k \in \mathscr{K} \rightarrow \bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathscr{K}$

Ayrıca $\mathscr{K}$ bir σ-halka ise

- Her $k \in N$ için $A_k \in \mathscr{K} \rightarrow \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathscr{K}$

Sağlandığını kolaylıkla gösterebiliriz.

2.1. CEBİR ve SİGMA-CEBRİ

Tanım: $\mathcal{K}$ bir Ω kümesinde bir alt küme topluluğu olduğunu varsayalım. Aşağıdaki özelliklere bakarak

*1) $\Omega \in \mathcal{K}$

*2) $A \in \mathcal{K}$ olsun. Bu takdirde $A^c \in \mathcal{K}$

*3) $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{K}$ ise bu takdirde $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{K}$

*4) $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{K}$ ise bu takdirde $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{K}$

Eğer $\mathcal{K}$ topluluğu *1, *2 ve *3 özelliklerini sağlıyorsa bir **cebir** veya **Boole Cebri**, *1, *2, *4 özelliklerin sağlıyorsa bir **Sigma-Cebir (σ-cebir)** adını alır. Cebir ya da sigma-cebrin Ω nın alt kümelerinden oluştuğunu belirtmek için "Ω içinde bir σ-cebir (ya da cebir) dir" şeklinde ifadesi kullanılabilir.

Önerme:

a) Bir σ-cebir aynı zamanda bir cebirdir.

b) Sonlu sayıda kümesi olan $\mathcal{K}$ nın σ-cebir ve cebir oluşu eşittir.

İspat: Cebir ve σ-cebir ifadelerinin tanımlarına bakıldığında bu sonuçlar açıktır.

a şıkkında $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ sonlu birleşimi $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots$ şeklinde sonsuz hale çevrilebilir. Dolayısıyla *3 özelliği de sağlanmış olur.

b şıkkında ise eğer $\mathcal{K}$ bir cebir ise $\mathcal{K}$ nın elemanlarından oluşan $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ birleşimi maksimum sonlu sayıda küme içerecektir. Böylece bu birleşim de $\mathcal{K}$ içindedir ve $\mathcal{K}$ bir σ-cebir

Örnek: f, X den Y ye bir fonksiyon olmak üzere Y üzerinde bir σ-cebiri olduğunda $f^{-1}(\mathcal{K}) = \{ f^{-1}(E) : E \in \mathcal{K}\}$ kümesi de X üzerinde bir σ-cebiridir.

Çözüm:

1. $\mathcal{K}$ Y üzerinde bir σ-cebiri olduğu için Y ∈ $\mathcal{K}$ dır. Bu nedenle $f^{-1}(Y) \in f^{-1}(\mathcal{K})$ dır. Diğer taraftan $f^{-1}(Y) = X$ olacağı için $X \in f^{-1}(\mathcal{K})$ dır.
2. $D \in f^{-1}(\mathcal{K})$ olsun. D en az E ∈ $\mathcal{K}$ nin ters görüntüsüdür. Yani;
   $D = f^{-1}(E) \Rightarrow D^c = [\ f^{-1}(E)\ ]^c = f^{-1}(E^c)$ olur. $\mathcal{K}$ bir sigma-cebiri olduğundan dolayı $E^c \in \mathcal{K}$ dır. Dolayısıyla $f^{-1}(E^c) \in f^{-1}(\mathcal{K}) \Rightarrow D^c \in f^{-1}(\mathcal{K})$ olur
3. Herhangi n için $D_n \in f^{-1}(\mathcal{K})$ olsun. $E_n \in \mathcal{K}$ olmak üzere her bir D_n için öyle bir E_n bulabiliriz ki $D_n = f^{-1}(E_n)$ dir. $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(E_n) = f^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)$ olur. $\mathcal{K}$ bir sigma-cebiri olduğu için $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{K}$ ve bu yüzden $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \in f^{-1}(\mathcal{K})$ olur. Bu da ispatın tamamlandığını gösterir.

2.1.1. σ-cebirlerin özellikleri

Teorem: $\mathcal{K}$ ve Ω içinde bir sigma-cebir olsun o zaman

- $\emptyset \in \mathcal{K}$
- $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{K} \Rightarrow \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{K}$.
- $A, B \in \mathcal{K} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{K}, A \,\Delta\, B \in \mathcal{K}$.

Kanıt:

- $\emptyset = \Omega^c \in \mathcal{K}$, (*1ve *2 gerekliliğinden dolayı)
- De Morgan kanununca $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = (\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^c\ )^c \in \mathcal{K}$ (*2ve *4 nin iki kere uygulanması sonucu)
- $A \setminus B = A \cap B^c$ ve $A \,\Delta\, B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ olduğu için bir üstte kanıtlanan teorem nedeniyle $\mathcal{K}$ içinde olurlar.

2.2. BOREL CEBİRLER

R^n deki bütün açık (a, b) aralıklarımda oluşan σ-cebirine **Borel Cebiri** denir. Borel cebirler $\mathcal{B}$ veya **$\mathcal{B}$(R)** sembolleriyle gösterilir. **$\mathcal{B}$(R)** nin her elamanına **Borel Kümesi** denilir.

Yukarıda verdiğimiz tanıma göre **$\mathcal{B}$(R)** kümesi açık aralıkları kapsayan bir σ-cebiridir. **$\mathcal{B}$(R) R** nin tüm açık kümelerini içinde barındırır.

Teorem:

- **R** nin tüm kapalı alt küme sınıfları
- **R** nin (-∞, b] biçimindeki alt aralıklar sınıfı
- **R** nin (a, b] biçimdeki alt aralıklar sınıfı

$\mathcal{B}$(R) Borel cebiri yukarıdaki sınıflar tarafından da üretilirler

İspat:

$\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ ve $\mathcal{B}_3$ teoremin belirtilen sınıflarının oluşturduğu σ-cebirleri olmak üzere; **$\mathcal{B}$(R)** R nin tüm açık alt kümelerini kapsaması ve kapalılık özelliğine sahip olduğundan R nin kapalı alt kümelerini de kapsar. Kapalı alt kümelerin oluşturduğu σ-cebiri $\mathcal{B}_1$ olduğundan $\mathcal{B}_1 \subset$ **$\mathcal{B}$(R)** dir.

(-∞, b] kümeler kapalı olduğundan $\mathcal{B}_1$ sınıfına aittir. Bu nedenle $\mathcal{B}_2 \subset \mathcal{B}_1$ dir.

(a, b] = (-∞, b] ∩ (-∞, a]^c şeklinde yazabildiğimiz için (a, b] tipli her aralık $\mathcal{B}_2$ ye aittir. O zaman $\mathcal{B}_3 \subset \mathcal{B}_2$ olur.

Bu bilgiler ışığında $\mathcal{B}_3 \subset \mathcal{B}_2 \subset \mathcal{B}_1 \subset$ **$\mathcal{B}$(R)** yazabiliriz.

Diğer taraftan (a, b) = $\bigcup_{n=1}^{\infty}$ (a, b-1/n] yazabildiğimiz için $\mathcal{B}_3$, R deki tüm açık aralıkları kapsar. O halde **$\mathcal{B}$(R)** $\subset \mathcal{B}_3$ dür.

Yukarıdaki ispat sonuçlarına bakarak $\mathcal{B}_3 = \mathcal{B}_2 = \mathcal{B}_1 = \mathcal{B}(\mathbf{R})$ bulunur. Bu da bize teoremin ispatını verir.

3. ÖLÇÜLERE GİRİŞ

Bu bölümde kümeler sınıfı üzerinde halka, σ-halkası, cebir ve σ-cebiri kavramları tanıtılan, Lebesque dış ölçümü, dış ölçüm, iç ölçüm gibi ölçümün özel uzaylarına göz atacağız.

3.1.ÖLÇÜLER

TANIM:(X, $\mathcal{K}$) bir ölçülebilir uzay olmak üzere; $\mathcal{K}$ üzerinde tanımlı genişletilmiş reel değerli bir μ fonksiyonu olduğunu kabul edelim.

1. $\mu(\emptyset) = 0$;
2. Her $A \in \mathcal{K}$ için $\mu(A) \geq 0$;
3. Her ayrık (A_n) dizisi için $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

Özelliklerini sağlayan fonksiyonlara **Ölçü Fonksiyonları**, kısaca **Ölçü** denilir.

2. özelliğin yanına $\mu(A) \leq \infty$ koşulu getirdiğimiz zaman μ ye bir **Sonlu Ölçü** adını veririz. X kümesi her biri sonlu ölçüye sahip kümelerden oluşarak yazılabiliyorsa buna; μ ölçüsü σ-sonludur denir. Eğer $\mu(X) = 1$ ise bu gibi ölçülere **Olasılık Ölçüsü** denir.

SORU 1:

$X \neq \emptyset$ ve $\mathcal{K} = P(X)$ olsun.

$$\mu(X) = \begin{cases} 0, & A = \emptyset \ ise \\ 1, & A = \emptyset \ ise \end{cases}$$

tanımlanan μ dönüşümü bir ölçü müdür?

ÇÖZÜM 1:

Bir dönüşümün ölçü olup olmadığını aşağıdaki 3 özelliği kontrol ederek söyleyebiliyoruz.

1. $\mu(\emptyset) = 0$;
2. Her $A \in \mathcal{K}$ için $\mu(A) \geq 0$;
3. Her ayrık (A_n) dizisi için $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

I. $n \in N$ için $A_n = \emptyset$ ise $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ gerçekleşir.

II. $n_0 \in N$ olmak üzere $\forall n \leq \emptyset$, $\forall m, n \geq n_0$ için $A_n, A_m \neq \emptyset$ ve

$A_n \cap A_m = \emptyset$ olmak üzere;

$(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = (\bigcup_{n=n0+1}^{\infty} A_n) \neq \emptyset$ [NOT: n=n0+1 kısmındaki n0 = n_0 dır.]

olup $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = 1$ dir. Diğer bir taraftan

$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=n0+1}^{\infty} \mu(A_n) = 1+1+1\ldots.. = +\infty$ olduğu dikkate alınırsa

$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \neq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

olduğu görülür. Üçüncü duruma bakmaya gerek yoktur. Dolayısıyla μ fonksiyonu P(X) üzerinde bir ölçü fonksiyonu değildir.

TANIM: Bir X kümesi, X in alt kümelerinden bir $\mathcal{K}$ σ-cebiri ve $\mathcal{K}$ üzerinde tanımlı bir μ ölçüsünden oluşan $(X, \mathcal{K}, \mu)$ üçlüsüne **Ölçü Uzayı** denir.

TEOREM:

(X, $\mathscr{K}$, μ) bir ölçü uzayı olmak üzere; Eğer A, B ∈ $\mathscr{K}$ ve A ⊂ B ise μ(A) ≤ μ(B) dir. Ayrıca μ(A) < ∞ ise

μ(B \ A) = μ(B) - μ(A) dır.

İSPAT:

B = A ∪ (B \ A) ve A ∩ (B \ A) = ∅ olduğu için

μ(B) = μ(A ∪(B \ A)) = μ(A) + μ(B \ A) yazılabilir.

μ(B \ A) ≥ 0 olduğu göz önüne alırsak μ(A) ≤ μ(B) yazabiliriz.

Eğer μ(A) < ∞ ise μ(B) = μ(A) + μ(B \ A) eşitliğinden μ(B \ A) çekilirse,

μ(B \ A)= μ(B) -μ(A) bulunur.

Bu eşitliğin A ⊂ B olması halinde doğru olduğuna dikkat edilmelidir. A ⊄ B ise eşitlik doğru olmaz.

TEOREM:

(X, $\mathscr{K}$, μ) bir ölçü uzayı olmak üzere;

A_n $\mathscr{K}$daki elemanların bir artan dizi olduğunu varsayarsak

$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$ dır.

İSPAT:

$\mu(A_n) = +\infty$ ise $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$ eşitliğinin her iki tarafı da +∞ olur. Her n $\mu(A_n)<\infty$ olduğu kabul edilirse

$S_1 = A_1$ ve $n > 1$ için $S_n = A_n \setminus A_{n-1}$

Biçiminde tanımlanan S_n dizisi $\mathscr{K}$daki kümelerin ayrık dizisi olur. Ayrıca

$A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k$ ve $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$

Yazılabilir. μ bir ölçü olduğundan dolayı

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(S_n) = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \mu(S_n)$$

$$= \mu(S_1) + \lim_{m\to\infty} \sum_{n=2}^{m} \mu(S_n) = \mu(S_1) + \lim_{m\to\infty} \sum_{n=2}^{m} \mu(A_n \setminus A_{n-1})$$

$$= \mu(S_1) + \lim_{m\to\infty} \sum_{n=2}^{m} \mu(A_n) - \mu(A_{n-1}) = \mu(A_1) + \lim_{m\to\infty} [\mu(A_m) - [\mu(A_1)]$$

$$= \lim_{m\to\infty} \mu(A_m)$$

bulunur.

3.2. DIŞ ÖLÇÜLER

Tanım:

X bir küme ve P(X) de X in kuvvet kümesi olmak üzere; P(X) üzerinde tanımlı, genişletilmiş reel değerli bir μ^* fonksiyonu

$\mu^*(\emptyset) = 0.$

Her $E \in P(X)$ için $\mu^*(E) \geq 0.$

$A \subset B \subset X$ için $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

Her bir $n \in N$ için $A_n \in P(X)$ ise $\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$

Şartlarını sağlayan μ^* fonksiyonuna X üzerinde **Dış Ölçüm** denir.

Ölçü ve dış ölçü tanımlarına baktığımız zaman ne ölçünün bir dış ölçü ne de bir dış ölçünün ölçü olma zorunluluğu olmadığını görürüz. Dış ölçü, ölçü fonksiyonlarının birçok özelliğini sağladığı için böyle bir ad verilmiştir. Bir ölçü aynı zamanda dış ölçü belirtmesi için tanım kümesinin P(X) kuvvet kümesi olması gerekmektedir.

SORU 1:

P(ℝ) üzerinde tanımlı olmak üzere

$$\mu_1^* (A) = \begin{cases} 0 & ; A = \varnothing \\ +\infty & ; A \neq \varnothing \end{cases}$$

dönüşümü bir dış ölçü müdür?

ÇÖZÜM 1:

1) $\mu_1^* (\varnothing) = 0$ tanımdan çıkardık.
2) $A \in P(\mathbb{R})$ için $\mu_1^* (A) \geq 0$ tanımda görülmektedir
3) $A, B \in P(\mathbb{R})$ ve $A \subset B$ olduğundan $\mu_1^* (A) \leq \mu_1^* (B)$ olduğunu göstereceğiz. İki durum söz konusudur:

    a: $A = \varnothing$ ise $B \neq \varnothing$ ya da $B = \varnothing$ dir. O halde $\mu_1^*(A) = 0$, $\mu_1^*(B) = +\infty$ ya da $\mu_1^*(B) = 0$ dır. Dolayısıyla $\mu_1^*(A) \leq \mu_1^*(B)$ gerçekleşir.

    b: $A \neq \varnothing$ ise $B \neq \varnothing$ olmak zorundadır. O halde $\mu_1^*(A) = +\infty$ ve $\mu_1^*(B) = +\infty$ olup,

    $\mu_1^*(A) \leq \mu_1^*(B)$ sağlanır.

4) (A_n), P(ℝ) deki kümelerin herhangi bir dizisi için $\mu_1^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_1^* (A_n)$ sağlandığını göstermeliyiz. Üç durumdan bahsedebiliriz:

    a: $\forall n \in \mathbb{N}$ için $A_n = \varnothing$ olduğunu varsayalım. $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$ olup $\mu_1^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = 0$ olur.

$\sum_{n=1}^{\infty}$ μ_1^* (A_n) = 0+0+…= 0 olduğundan dolayı $\mu_1^*(\bigcup_{n=1}^{\infty}$ A_n) =$\sum_{n=1}^{\infty}$ μ_1^* (A_n) sağlanır.

b: $n_0 \in \mathbb{N}$ myle ki $\forall n \leq n_0$ için $A_n \neq \varnothing$ ve $\forall n > n_0$ için $A_n = \varnothing$ olsun. Bu durumda

$\mu_1^*(\bigcup_{n=1}^{\infty}$ A_n) = $\mu_1^*(\bigcup_{n=1}^{n0}$ A_n) = +∞ (n0= n_0)

ve

$\sum_{n=1}^{\infty}$ μ_1^* (A_n) = $\sum_{n=1}^{n0}$ μ_1^* (A_n) = +∞ (n0= n_0)

gerçekleşip istenilen eşitsizliğe ulaşmış olunur.

c: $\forall n \in \mathbb{N}$ için $A_n = \varnothing$ olmak üzere

$\mu_1^*(\bigcup_{n=1}^{\infty}$ A_n) = +∞ ve $\sum_{n=1}^{\infty}$ μ_1^* (A_n) = +∞

olduğundan yine istenilen eşitsizliğe ulaşmış olunur.

Dolayısıyla μ_1^*, P(ℝ) üzerinde dış ölçüdür.

3.3. LEBESGUE DIŞ ÖLÇÜSÜ

Bir I aralığının ℓ(l) uzunluğu o aralığın uç noktalarının farkıdır. l = [a, b] aralığının boyu ℓ(l) =b – a dır. Uzunluğu tanım kümesi aralıklar koleksiyonu, değer kümesi de genişletilmiş reel sayılar kümesidir.

Öyle bir λ fonksiyonu oluşturalım ki R nin alt kümelerinin bir $\mathscr{M}$ sınıfı üzerinde tanımlı olsun ve aşağıdaki özellikleri sağlasın:

1. λ, R nin her bir E alt kümesi üzerinde tanımlı olsun. Yani, $\mathscr{M}$= P (R) olsun
2. Her bir l aralığı λ(l) = ℓ(l) olsun.
3. Eğer (E_n) bir ayrık dizi ve λ bunların her biri üzerinde tanımlı ise $\lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n)$
4. λ öteleme altında değişme özelliği gösteriyor olsun. Yani λ fonksiyonu, E ve E + y = {x + y : x ∈ E} kümeleri üzerinde tanımlı olsun λ (E + y) = λ(E) olsun.

Tanım: (l_k), R nin sınır ve açık alt aralıklarının vir dizisi,

$\mathcal{T}_A = \{(l_k) : A \subset \cup\, l_k\}$ olsun P(R) üzerinde

$\lambda^*(A) = \inf\{\sum_{k=1}^{\infty} \ell(l_k) : (l_k) \in \mathcal{T}_A\}$

Biçiminde tanımlanan λ^* bir dış ölçüdür. Bu dış ölçüye Lebesgue dış ölçüsü denir.

3.3.1. Lebesgue dış ölçüsünün bazı özellikleri:

Teorem1: Lebesgue dış ölçüsü R nin her bir alt aralığına onun uzunluğu karşılık getirir, yani I ⊂ R bir aralık ise

$\lambda^*(l) = \ell(l)$ dır.

İspat: önce l = (a, b) aralığında dış ölçüsünü bulalım. $I \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} l_k$ özelliğini sağlayan her bir (I_k) dizisi için

$\ell(l) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \ell(l_k) \Rightarrow b - a \leq \sum_{k=1}^{\infty} \ell(l_k)$ olacağı açıktır. Özel olarak I_1 = I ve k > 1 için l_k = ∅ alınırsa (l_k) ∈ $\mathcal{T}_i$ olur ve bu dizi için

$\sum$ $\ell(l_k) = b - a = \ell(l)$ bulunur. Şu hâlde,

$\lambda^*(l) = \inf\{\sum_{k=1}^{\infty} \ell(l_k) : (l_k) \in \mathcal{T}_1\} = b - a$ olacaktır.

J = [a, b] aralığını göz önüne alalım. $I_1 = (a - \mathcal{E}/4, b + \mathcal{E}/4)$ ve diğer tüm aralıklar boyları toplamı $\mathcal{E}/2$ olacak şekilde herhangi açık aralıklar olsun.

$\sum$ $\ell(l_k) = b - a + \mathcal{E}$ olacağından

$\lambda^*([a, b]) \leq b - a$ dır. Şimdi bu eşitsizliğin tersini ispatlamaya çalışalım. $(I_k) \in \mathcal{T}_j$ olsun

J kompakt olduğundan I_k aralıklarından sonlu tanesi ile örtüşebilir. Şu halde öyle bir p ∈ N vardır ki,

$J \subset \bigcup_{K=1}^{P} I_k$ olur. Böylece,

$b - a \leq \sum_{k=1}^{p} \ell(l_k)$ ve dolaysıyla $b - a \leq \sum_{k=1}^{\infty} \ell(l_k)$ yazabiliriz. b – a sayısı infimumu alınan kümelerin tüm elemanlarından küçük veya eşit olacağından kümenin infinden küçük veya eşit kalır. Yani

$b - a \leq \lambda^*(J)$ olur.

$\lambda^*(J) = b - a = \ell(l_k)$ eşitliği elde edilir.

Teorem2: R^n üzerindeki Lebesgue dış ölçüsü her bir aralığa onun hacmini karşılık getirir.

Sonuç 1: A sayılabilir bir küme ise $\lambda^*(A) = 0$ dır.

İspat1.2: $\mathcal{E} > 0$ istenilen kadar küçük bir sayı ise $A = \{x_1, x_2, \ldots\}$ olsun $I_k = (x_k - \mathcal{E}/2\text{^}k + 1, x^k + \mathcal{E}/2\text{^}k + 1)$ seçilirse $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ olur. Bu durumda

$\lambda^*(A) \leq \lambda^*(\cup I_k) \leq \sum \lambda^*(I_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{E}/2\text{^}k = \mathcal{E}$

olur ki bu $\lambda^*(A) =$ olacağını gösterir.

3.4. İÇ ÖLÇÜM

TANIM:

X reel sayılarda tanımlı bir küme olsun. X kümesinin iç ölçümü **μ_*(X)** şu şekilde tanımlanır:

$\mu_*(X) = \sup \{\mu(B) : B \subset A, B \in M\}$ (M = ölçülebilir kümeler)

3.4.1. İç Ölçülerin Bazı Özellikleri:

1. Bir X kümesinin iç ölçümü dış ölçümden küçük yada eşittir.
2. $\mu_*(\emptyset) = 0$.
3. Reel sayı doğrularının iç ölçümleri sonsuzdur, yani, $\mu_*(\mathbb{R}) = \infty$.

İspat:

1.) $B \in M$ ve $B \subset X$ olmak üzere; Dış ölçümün monotonluk özelliğinden yararlanılarak

$\mu^*(B) \leq \mu^*(A)$ ve $\mu(B) \leq \mu^*(A)$ olduğundan

$\mu_*(A) \leq \mu^*(A)$

eşitsizliğini elde ederiz.

2.) $0 \leq \mu_*(\emptyset) \leq \mu^*(\emptyset) = 0$.

3.) Reel sayıların dış ölçümlerinden kolaylıkla görülmektedir.

4. ÖLÇÜLEBİLİR FONKSİYONLAR

Tanım: f: A → $\mathbb{R}^*$ ve A ∈ $\mathscr{K}$ olsun. Eğer her a ∈ $\mathbb{R}$ için;

f^{-1}(a, ∞] = {x ∈ A : f(x) > a} ∈ $\mathscr{K}$ ise f fonksiyonu ölçülebilir bir fonksiyondur.

Teorem (1.1): (X, $\mathscr{K}$) ölçülebilir bir uzay olmak üzere; f : X → $\mathbb{R}$ fonksiyonu için aşağıdaki önermeler birbirlerine denktir.

I. f ölçülebilir fonksiyon.

II. Her a ∈ $\mathbb{R}$ için A_a = {x ∈ X : f(x) > a} ∈ $\mathscr{K}$.

III. Her a ∈ $\mathbb{R}$ için B_a = {x ∈ X : f(x) ≤ a } ∈ $\mathscr{K}$.

IV. Her a ∈ $\mathbb{R}$ için C_a = {x ∈ X : f(x) ≥ a } ∈ $\mathscr{K}$.

V. Her a ∈ $\mathbb{R}$ için D_a = {x ∈ X : f(x) < a } ∈ $\mathscr{K}$.

İspat:

A_a ve B_a birbirlerinin tümleyenleridir. Kümelerden biri $\mathscr{K}$ 'ya ait olduğunda diğerin de ait olduğunu kanıtlamış oluruz. Dolayısıyla II. Ve III. Denktir. Benzer şekilde IV. ve V. de denktir.

Şimdi II. ve III. Önermelerinin denkliğine bakacak olursak:

II. doğru olsun. Bu durumda her bir n ∈ $\mathbb{N}$ için

$$A_{a-\frac{1}{n}} = \{x \in X: f(x) > a-\tfrac{1}{n}\} \in K$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{a-\frac{1}{n}} = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}\,(]\,a-\tfrac{1}{n}, +\infty\,[) = f^{-1}(\,\bigcap_{n=1}^{\infty}\,[\,a-\tfrac{1}{n}, +\infty\,[)$$

$$= f^{-1}([a, +\infty)) = \{x \in X : f(x) \geq a\} = C_a$$

Benzer şekilde:

$$A_a = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_{a+\frac{1}{n}}$$

olacağı için IV. ⇒ II. olur. Şu halde II. ≡ IV. dir.

I. ⇒ IV. Her a ∈ $\mathbb{R}$ için

$$\{x \in X : f(x) \geq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x : f(x) > a-\tfrac{1}{n}\} \in \mathscr{K}$$

Yukarıda ki tüm denklem ve eşitliklere bakılacak olursa

I. ≡ IV.
II. ≡ IV.
II. ≡ III.
IV.≡V.

Bu eşitliklerin ışığında⇒ I.≡ II.≡ III.≡ IV.≡ V.

Önerme: A $\in \mathscr{K}$, f : A $\rightarrow \mathbb{R}$ ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere; a, b $\in \mathscr{K}$ olsun. O zaman aşağıdaki kümeler ölçülebilirdir.

1. $a \in \mathbb{R}$ için $\{x: f(x) = a\} \in \mathscr{K}$.
2. $\{x: f(x) < \infty\} \in \mathscr{K}$.
3. $\{x: a < f(x) \leq b\} \in \mathscr{K}$.

İspat:

(1) $a \in \mathbb{R}$ için $\{x: f(x) = a\} = \{x : f(x) \leq a\} \cap \{x : f(x) \geq a\} \in \mathscr{K}$ dır.

$a = \infty$ olsun $\{x: f(x) = \infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x : f(x) \geq n\} \in \mathscr{K}$ dır.

$a = -\infty$ olsun $\{x: f(x) = -\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x : f(x) \leq -n\} \in \mathscr{K}$ dır.

(2) $\{x : f(x) < \infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x : f(x) \leq n\}$

(3) $\{x : a < f(x) \leq b\} = \{x : f(x) > a\} \cap \{x : f(x) \leq b\}$.

Aşağıda vereceğimiz önerme yardımıyla ölçülebilir fonksiyonun tanımdaki reel sayıları rasyonel sayılar ile değiştirebildiğimiz göreceğiz.

Önerme: Q rasyonel sayıların kümesi olmak üzere :

1) f ölçülebilir fonksiyondur.
2) Her $q \in Q$ için $\{x : f(x) > q\} \in \mathscr{K}$ dır.

İspat: 2 ⇒ 1 olduğu için ispat etmek yeterlidir. Bir $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere Q rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ içinde yoğun olduğu için Q içinde bir q_n dizisi bulabiliriz.

$\lim_{nqn} = a$ ve $a \leq q_n$' dir.

Bu yüzden $\{x : f(x) > a\} = \bigcup_n \{x : f(x) > q_n\} \in \mathscr{K}$ olur.

Önerme: f, g ölçülebilir fonksiyon olmak üzere; aşağıdaki kümelerde ölçülebilir kümelerdir.

(1) $\{x: f(x) > g(x)\} \in \mathscr{K}$ dır

(2) $\{x: f(x) \geq g(x)\} \in \mathscr{K}$ dır

(3) $\{x: f(x) = g(x)\} \in \mathscr{K}$ dır

İspat:

(1) İçin aşağıdaki küme eşitliğini kullandığımızda

$\{x: f(x) > g(x)\} = \cup_{q\in Q}(\{x: f(x) > q\}) \cap \{x: g(x) < q\}$ sağ taraftaki küme ölçülebilir olduğu için bize verilen küme de ölçülebilirdir.

(2) $\{x: f(x) \geq g(x)\} = \{x: g(x) > f(x)\}^c \in \mathscr{K}$ dır.

(3) $\{x: f(x) = g(x)\} = \{x: f(x) \geq g(x)\} \cap \{x: g(x) \geq f(x)\} \in \mathscr{K}$ dır.

4.1.Tanım: Bir E kümesi için

$$K_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \ ise \\ 0, & x \notin E \ ise \end{cases}$$

Biçiminde tanımlanan K_E gibi fonksiyonlara E kümesinin **karakteristik fonksiyonu** denir. E ölçülebilir olduğundan K_E fonksiyonu da ölçülebilir fonksiyondur. İspatlamamız gerekirse:

$$\{x \in X : K_E(X) > a\} = \begin{cases} X, & a < 0 \ ise \\ E, & 0 \leq a < 1 \ ise \\ \emptyset, & 1 \leq a \ ise \end{cases}$$

Olduğundan her $a \in \mathbb{R}$ için $\{x \in X : K_E(x) > a\} \in \mathscr{K}$ dır.

Tanım: X=R ve $\mathscr{K} = \mathscr{B}(R)$ olmak üzere sürekli her f: R → R fonksiyonu (Borel) ölçülebilirdir.

İspat: f sürekli olduğu zaman her $a \in R$ için

$$\{x \in R : f(x) > a\} = f^{-1}((a, +\infty))$$

Kümesi R de açık bir kümedir. Her açık küme borel cebirine ait olduğu için

$$\{ x \in R : f(x) > a \} = \mathscr{B}(R)$$

dir. Yani borel ölçülebilirdir.

Teorem: f ve h ölçülebilir fonksiyonlar olmak üzere aşağıdaki fonksiyonlar da ölçülebilirdir. ($c \in R$)

- $c \times h$
- f^2
- $f \pm h$
- $f \times h$
- $| f |$

İspat:

- c sabiti için 3 durum söz konusudur
  1) c = 0 olduğunda c × h sabit fonksiyon olacağı için ölçülebilir olur.
  2) c > 0 olduğunda

     $\{x \in X : ch(x) > a\} = \{x \in X : h(x) > \frac{a}{c}\} \in \mathscr{K}$ olur; h fonksiyonu ölçülebilir olduğundan dolayı.
  3) c < 0 olduğunda teorem 1.1 in de yardımıyla

     $\{ x \in X : ch(x) > a \} = \{ x \in X : h(x) < \frac{a}{c} \}$ $\mathscr{K}$ olur

  3 durumun da incelendiğinde $c \in R$ nin her durumunda c × h ölçülebilir fonksiyondurlar.
- f^2 de 2 durum göz önüne alınmalıdır
  1) a < 0 olduğu zaman ;

     $\{x \in X : f^2(x) > a \} = X$ olup ölçülebiliridir.
  2) $a \geq 0$ ise

     $\{x \in X : f^2(x) > a \} = \{x \in X : f(x) > \sqrt{a} \} \cup \{x \in X : f(x) > -\sqrt{a} \}$ olur. f ölçülebilir olduğu için sağ kısımdaki kümelerde ölçülebilirdir. Dolayısıyla f^2 ölçülebilir fonksiyondur.
- (f + h)(x) > a olması için f(x) > k ve h(x) > a-k olması bizim için yeterlidir. $r \in Q$ şeklinde bir sayının varlığı teoremi ispatlamamız için yeterlidir.

  $\{x \in X : (f+h) > a\} = \cup_{r \in Q} [\{x \in x : f(x) > k\} \cap \{x \in X : h(x) > a\text{-}k\}]$

  Yazabiliriz. f ve h ölçülebilir oldukları için sağ kısımdaki kümeler de ölçülebilir fonksiyondurlar. Bu nedenle f + h ölçülebilirdir.
- h × (-1) = -h ölçülebilirdir(c sabiti). Buna ek olarak f + (-h) = f – h ve f + h ölçülebilirdir. $(f + h)^2$ ve $(f - h)^2$ de ölçülebilir fonksiyonlardır. Bu fonksiyonları aşağıdaki gibi kullanırsak f × h ın ölçülebilir olduğunu görmüş oluruz

  $\frac{1}{4}[(f + h)^2 - (f - h)^2] = f \times h$
- Mutlak değerli fonksiyonlarda iki durum söz konusudur.
  1) a < 0 için $\{x \in X : | f | > a\} = X \in \mathscr{K}$ olur.

2) $a \geq 0$ için $\{x \in X : |f| > a\} \cup \{x \in X : |f| < -a\}$ birleşimle oluşan kümedeki her küme elemanı ölçülebilir olduğu için oluşan mutlak değer fonksiyonu yani $|f|$' de ölçülebilirdir.

Teorem: f fonksiyonunun ölçülebilir olması için gerek ve yeter koşulun R içerisindeki her U açık kümesi için $f^{-1}(U)$ kümesinin ölçülebilir olmasıdır.

İspat: $r \in R$ ve $U = (r, \infty)$ olmak üzere;
$f^{-1}(U) = \{x : f(x) > r\}$ kümesi ölçülebilirdir.
f ölçülebilir ve U bir açık küme olmak üzere her açık küme açık aralıkların birleşimi olarak yazılabileceğinden $U = \bigcup_n f^{-1}(a_n, b_n)$ kümesi ölçülebilirdir.
Sürekli bir fonksiyonun tanım kümesi ölçülebilirse ölçülebilir.

Önerme: $f : R \rightarrow R$ ölçülebilir ve $h : R \rightarrow R$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere iki fonksiyonun bileşkesi (hof) ‘da ölçülebilirdir.

İspat: U reel sayılarda açık bir küme olmak üzere sürekli olduğundan $h^{-1}(U)$ reel sayılarda bir açık küme olacaktır. $(hof)^{-1}(U) = f^{-1}(h^{-1}(U))$ kümesinin ölçülebilirliği bileşke fonksiyonun sürekliliğini gerektirir.

Tanım: $(X, \mathscr{K})$ ölçülebilir uzay ve $K \in \mathscr{K}$ olmak üzere;
$f : K \rightarrow R$ ölçülebilirdir $\Leftrightarrow \forall a \in R$ için $\{x \in K : f(x) > a\} \in \mathscr{K}$. Teorem 1.1 deki denklikler $f: K \rightarrow R$ içinde geçerli olacağından dolayı bu tanımların benzerleri $[-\infty, +\infty]$ değerli fonksiyonlar içinde verilebilirler.

Tanım: $(X, \mathscr{K})$ ölçülebilir uzay ve $K \in \mathscr{K}$ olmak üzere;
$f: K \rightarrow [-\infty, +\infty]$ ölçülebilir fonksiyondur. $\Leftrightarrow \forall a \in R$ için
$f^{-1}((a, +\infty]) = \{x \in K : f(x) > a\} \in \mathscr{K}$ dır.
X üzerinde tanımlanmış, genişletilmiş reel değerli $\mathscr{K}$ ölçülebilir tüm fonksiyonlar kümesi $M(X, \mathscr{K})$ olarak gösterilir.

Teorem: Genişletilmiş reel değerli f fonksiyonunun ölçülebilir olması için gerek ve yeter koşul

$A = \{x \in X : f(x) = +\infty\}$,

$B = \{ x \in X : f(x) = -\infty\}$ kümeleri ölçülebilir ve

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & x \notin A \cup B \ ise \\ 0, & x \in A \cup B \ ise \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan reel değerli f_1 fonksiyonun ölçülebilir olmasıdır.

İspat: $f \in M(X, \mathscr{K})$ olduğunda A ve B kümelerinin ölçülebilir olduğunu yukarıda verilen tanım gereği ortaya koyarız.

- $a \geq 0$ olmak üzere

  $\{x \in X : f_1(x) > a\} = \{ x \in X : f(x) > a \} \setminus A$ olur.

- $a < 0$ ise:

  $\{x \in X : f_1(x) > a\} = \{ x \in X : f(x) > a \} \cup B$ olur.

Denklemlerin sağ kısmında kalan kümeler ölçülebilir oldukları için soldaki küme yani f_1 de ölçülebilir bir fonksiyondur.

Denkleme tersten bakacak olursak; A, B ve f_1 ölçülebilir olduklarını biliyorsak

- $a \geq 0$ olmak üzere

  $\{x \in X : f(x) > a\} = \{ x \in X : f_1(x) > a \} \cup A$

- $a < 0$ ise:

  $\{x \in X : f(x) > a\} = \{ x \in X : f_1(x) > a \} \setminus B$ olur.

Bu da bize f fonksiyonun da ölçülebilir olduğunu gösterir.

Önerme: f_n ölçülebilir bir reel değerli fonksiyon dizisi olsun. Bu takdir aşağıdaki verilenler de ölçülebilirdir.

1) *sup* f_n, *inf* f_n ölçülebilirdir.
2) lim supf_n ve lim inf f_n ölçülebilirdir.

İspat:

1. $\{x : \sup_n f_n (x) \leq a\} = \{x : f_1(x) \leq a, f_2)x) \leq a, \ldots\ldots..\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x : f_n (x) \leq a\}$

   Her bir n için f_n ölçülebilir olduğu için sup f_n kümesi de ölçülebilirdir.

   Benzer şeklide *inf* f_n= -*sup* ($-f_n$) olduğu için inf f_n de ölçülebilir bir dizidir.

2. lim supf_n = $\inf_{w\geq1}(\sup_{n\geq w} f_n)$ ve lim inf f_n = $\sup_{w\geq1}(\inf_{n\geq w} f_n)$ şeklinde yazılabilirler. Her bir w doğal sayısı için:

   $g_w = \sup_{n\geq w} f_n$, $h_w = \inf_{n\geq w} f_n$ dersek bir üstteki önerme seçeneğinde de görüldüğü gibi g_w ve h_w ölçülebilirdir.

   lim supf_n = inf g_w ve lim inf f_n = sup h_w olduğu için iki limit değeride ölçülebilirdir.

Tanım:

- $\mathcal{B}(R^k)$ Borel cebrine göre ölçülebilir bir fonksiyona Borel ölçülebilir fonksiyon ya da Borel fonksiyon denir.

$\mathcal{M}(R, \lambda^*)$ σ-cebrine göre ölçülebilir bir fonksiyon ise Lebesgue ölçülebilir fonksiyon denir.

5. LEBESGUE İNTEGRALİ

5.1. SINIRLI ÖLÇÜLEBİLİR FONKSİYONLARIN LEBESGUE İNTEGRALİ

f(x), [a, b] aralığında sınırlı ve ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere $\alpha < f(x) < \beta$ olacak şekilde iki sayı verilsin. $[\alpha, \beta]$ aralığı,

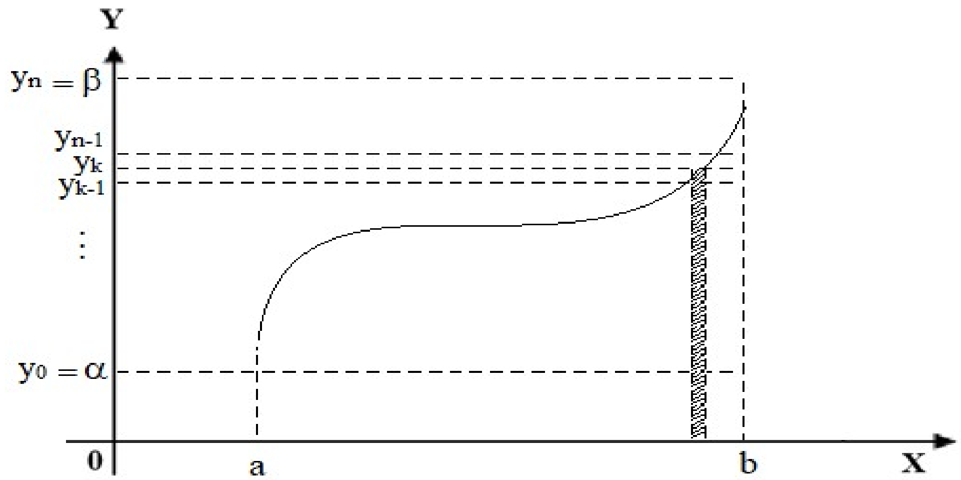
$\alpha = y_0 < y_1 < \ldots < y_{n-1} < y_n = \beta$

Şeklinde n tane alt aralığa bölelim. Bu noktalar geometrik olarak Y ekseni üzerindedir. $[\alpha, \beta]$ aralığını bölerek elde edilen bu noktalara aralığın bölüntüsü, parçalanışı ya da ağı denir.

K = 1, 2, …, n olmak üzere $y_{k-1} \leq f(x) < y_k$ şeklinde E_k kümesin [a, b] aralığındaki x noktalarının kümesi olsun. Yani E_k,

$E_k = \{x : y_{k-1} \leq f(x) < y_k\}$

Şeklinde tanımlansın. f(x) ölçülebilir fonksiyon olduğu için E_k kümesinin her biri de ölçülebilirdir. Yani $i \neq j$ için $E_i \cap E_j = \varnothing$ olur.



Şekil.2

$S = \sum_{k=1}^{n} y_k m(E_k)$ ve $s = \sum_{k=1}^{n} y_{k-1} m(E_k)$

İfadeleri alt ve üst toplam olarak tanımlanır. $[\alpha, \beta]$ aralığındaki tüm ağlar için, I = ebas(S) = inf(S) ve J = eküs(s) = sup(s)

Olarak tanımladık. Bu tür değerler hep vardır ve bunlar aşağıdaki gibi tanımlanırlar

I= $\int_{a}^{-b} f(x)dx$ ve J = $\int_{-a}^{b} f(x)dx$

Bu değerler f(x) fonksiyonunun [a, b] aralığındaki üst ve alt integralleri biçiminde adlandırılır. Tanımdan da anlaşılacağı gibi J ≤ I olduğu görülür.

Eğer I = J ise ya da

I = $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} y_k m(E_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} y_{k-1} m(E_k)$ = J

Olursa f(x) fonksiyonu [a, b] aralığında Lebesgue anlamında integrallenebilir denir. Riemann da olduğu gibi alt üst integrallerin eşit olduğu değer, ortak işaret olarak

$\int_{a}^{b} f(x)dx$ ve $\int_{a}^{b} f(x)dx < \infty$

Biçiminde yazılır ve buna f(x) fonksiyonunun [a, b] aralığında sonlu Lebesgue integrali denir. Eğer I ≠ J ise, o halde f(x) in [a, b] kapalı aralığında Lebesgue integrali yoktur denilir. Yani,

I = $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} y_k m(E_k) \neq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} y_{k-1} m(E_k)$ = J

Şekil.2 de görüldüğü gibi $y_k m(E_k)$ değeri, noktalarla işaretli dikdörtgenin alanını ve $y_{k-1} m(E_k)$ değeri ise taralı dikdörtgenin alanını belirtir. E_k kümesi de X ekseni üzerinde bu dikdörtgenlerin tabanlarına karşılık gelen aralıkların kümesini oluşturur. Bu halde, Lebesgue integral, y = f(x) eğrisi, X ekseni x = a ve x = b doğruları tarafından sınırlandırılan sınırlı alanı ifade eder.

Bu kısımda Riemann integralini kısaca (R) $\int_{a}^{b} f(x)$ olarak göstereceğiz. Ayrıca yukarıda tanımladığımız Lebesgue integralini şu şeklilde de tanımlayabiliriz,

E, [a, b] kapalı aralığından ölçülebilir bir küme olmak üzere

g(x) = $\begin{cases} f(x), & x \in E \\ 0, & x \notin E \end{cases}$ şeklinde tanımladığımızda ;

$\int_E f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$ ifadesi f(x) fonksiyonun E kümesinde Lebesgue integralidir.

Tanım 1: f(x), $i \neq j$ için $y_i \neq y_j$ olmak üzere, $y_1, y_2, \ldots, y_n \ldots$ değerlerini alan bir fonksiyon olsun. Böylece f(x) fonksiyonunun E kümesinde

$$\int_E f(x) d\mu = \sum_n y_n \mu\{x : x \in E, f(x) = y_n\}$$

Eşitliğin sağ kısmındaki seri mutlak değerce yakınsaksa, f(x) basit fonksiyonu E kümesi üzerinde μ ölçümüne göre integrallenebilirdir denir. Böylece f(x) fonksiyonuna bir E kümesi üzerinde μ ölçümüne göre integrallenebiliyorsa,

$$\sum_n y_n \mu\{x : x \in E, f(x) = y_n\}$$

Serisine f(x) fonksiyonunun E kümesi üzerinde μ ölçümüne göre integralidir deriz.

Tanım 2: E kümesi üzerinde integrallenebilen $f_n(x)$ basit fonksiyonlarının bir dizisi düzgün olarak f(x) fonksiyonuna yakınsıyorsa, f(x) fonksiyonuna E kümesi üzerinde μ ölçümüne göre integrallenebilir diyeceğiz.

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx = \int_E f(x)d\mu$$

İle gösterip, buna f(x) fonksiyonun E kümesi üzerinde μ ölçümüne göre Lebesgue integrali diyeceğiz.

Teorem 1: Aynı bölüntü içinde, üst toplamın bir alt sınır ve alt toplamın bir üst sınırı vardır.

İspat: k=1, 2, 3, … olmak üzere $y_k \geq \alpha$ olduğu için,

$$Y_k m(E_k) \geq \alpha m(E_k) \text{ o}$$

Olur. Aynı zamanda,

$$E = \bigcup_{k=1}^{n} E_k = \{x : \alpha < f(x) < \beta\}$$

Olmak üzere $i \neq j$ için $E_i \cap E_j = \emptyset$ olduğundan,

$$S = \sum_{k=1}^{n} y_{k-1} m(E_k) \leq \beta \sum_{k=1}^{n} y m(E_k) = \beta m(E)$$

Sonucunu elde ederiz. Yani $\beta m(E)$ değeri salt toplamın üst sınırıdır.

Sonuç 1: mümkün olan tüm bölüntüler için, üst toplamın I gibi bir en büyük alt sınırı ve alt toplamın da J gibi bir en küçük üst sınırı mevcutdur.

Teorem 2: P bölüntüsüne bir nokta daha ekleyerek daha küçük bir P_1 bölüntüsü elde edelim. P_1 bölüntüsü için S_1 ve s_1 sırasıyla üst ve alt toplamsa $s \leq s_1 \leq S_1 \leq S$ olur.

İspat 2: Y ekseni üzerinde $[\alpha, \beta]$ kapalı aralığında,

$\alpha = y_0 < y_1 < \ldots < y_{n-1} < y_n = \beta$

Olacak şekilde bir $P = \{y_0, y_1, \ldots, y_n\}$ bölüntüsünü seçelim. Bu P bölüntüsüne eklenen nokta $y_{p-1} < u < y_p$ aralığında olsun. Böylece, (y_{p-1}, y_p) açık aralığına karşılık gelen üst toplam $y_p m(E) = S$ olur. Diğer taraftan,

$E_p^{(1)} = \{x : y_{p-1} \leq f(x) \leq u \}$ ve $E_p^{(2)} = \{x : u \leq f(x) \leq y_p\}$

Olmak üzere,

$S_1 = u m(E_p^{(1)}) + y_p m(E_p^{(2)})$

Toplamı, u noktası eklenmesiyle elde edilen üst toplamdır. Ayrıca

$E_p = E_p^{(1)} \cup E_p^{(2)}$ ve $m(E_p) = m(E_p^{(1)}) + m(E_p^{(2)})$ olduğu açıktır. Böylece,

$S = y_p m(E_p) = y_p m(E_p^{(1)}) + y_p m(E_p^{(2)})$

Yazılır. Buradan,

$S_1 - S = u m(E_p^{(1)}) + y_p m(E_p^{(2)}) - y_p m(E_p) = (u - y_p) m(E_p^{(1)})$

Olur. $m(E_p^{(1)}) \geq 0$ ve $y_p > u$ olduğundan, $S_1 - S \leq 0$ çıkar. Bu da $S_1 \leq S$ demektir. Öyleyse bir bölüntüye bir nokta eklemekle üst toplam büyümez.

Benzer olarak (y_{p-1}, y_p) aralığına karşılık gelen alt toplam $s = y_{p-1} m(E_p)$ olur. Diğer yandan,

$S_1 = u m(E_p^{(2)}) + y_{p-1} m(E_p^{(1)})$

Toplamı, u noktası eklenmesiyle elde edilen alt toplamdır. Ayrıca,

$s = y_{p-1}m(E_p) = y_{p-1}m(E_p^{(1)}) + y_{p-1}m(E_p^{(2)})$

yazılır. Böylece,

$s_1 - s = (u - y_{p-1})m(E_p^{(2)})$

olur. $u > y_{p-1}$ ve $m(E_p^{(2)}) \geq 0$ olduğundan, $s_1 - s \geq 0$ yazılır. P bölüntüsüne bir nokta eklemek alt toplamı küçültmez.

Teorem 3: f(x) fonksiyonunun Lebesgue anlamında integrallenebilmesi için gerek ve yeter koşulun, her $\mathcal{E} > 0$ sayısına karşılık üst toplamı S ve alt toplamı s olan bir p bölüntüsü için $S\text{-}s < \mathcal{E}$ olmalıdır.

İspat 3: Eğer $\mathcal{E} > 0$ sayısı verildiğinde herhangi bir P bölüntüsü için $S - s < \mathcal{E}$ ise $s \leq J \leq I \leq S$ eşitsizliği ile birlikte $0 \leq I - J \leq S - s < \mathcal{E}$ olur. $\mathcal{E} \to 0$ I=J yazılır. Bu da Lebesgue anlamında integrallenebilmesinin tanımıdır.

Tersine, f(x) fonksiyonu Lebesgue anlamında integrallenebilir olsun. Yani, I = J olduğunu varsayalım. Bu halde $\mathcal{E} > 0$ sayısı verilen herhangi bir P bölüntüsü için

I= ebas(S) ve J = eküs(s) olduğundan

$S < I + \mathcal{E}/2$ ve $s > J - \mathcal{E}/2$

Yazılabilir. Buradan,

$S - s < (I + \mathcal{E}/2) - (J - \mathcal{E}/2) = \mathcal{E}$

İfadesi gelir.

Teorem 4: Eğer f(x) fonksiyonu [a, b] aralığında sınırlı ve ölçülebilirse, o zaman f(x) fonksiyonun -un bu aralıkta Lebesgue integrali vardır.

İspat 4:

$S - s = \sum_{k=1}^{n} (y_k - y_{k-1})m(E_k)$

$[\alpha, \beta]$ aralığında bir bölüntüsünü, $y_k - y_{k-1} < \mathcal{E}/(b - a)$ olacak şekilde seçebiliriz. Böylece

$S - s = \sum_{k=1}^{n} (y_k - y_{k-1})m(E_k) < \sum_{k=1}^{n} \mathcal{E}/(b - a)\, m(E_k) = \mathcal{E}/(b - a)\sum_{k=1}^{n} m(E_k) = \mathcal{E}$

Çıkarılır. İlk ve son terimlerden, S – s < $\mathcal{E}$ yazılır. Teorem3 e göre f(x) fonksiyonu [a, b] kapalı aralığında Lebesgue anlamında integrallenebilirdir.

Teorem 5(Ortalama Değer Teoremi): f(x) fonksiyonu bir E kümesinde ölçülebilir ve A ≤ f(x) ≤ B ise

Am(E) ≤ $\int_E$ f(x)dx ≤ Bm(E)

Eşitsizliği yazılır. Bu eşitsizliğe Lebesgue integralleri için ortalama değer teoremi denir.

İspat 5: 1. Teorem ve s ≤ J ≤ I ≤ S oluşumları kullanılırsa,

Am(E) ≤ s ≤ J ≤ I ≤ S ≤ Bm(E)

Yazılır. f(x) fonksiyonu sınırlı ve ölçülebilir olduğundan Lebesgue anlamında integrallenebilir. Öyleyse I = J eşitliği ile birlikte

Am(E) ≤ $\int_E f(x)dx$ ≤ Bm(E)

Eşitsizliği bulunur.

Teorem 6: f(x) fonksiyonu bir E_k kümesinde sınırlı ve ölçülebilir olsun. eğer $E_1 \cap E_2 = \varnothing$ ve $E = E_1 \cup E_2$ ise,

$\int_E f(x)dx = \int_{E1} f(x)dx + \int_{E2} f(x)dx$

Olur.

İspat 6: $\alpha = y_0 < y_1 < \ldots < y_{n-1} < y_n = \beta$ olacak şekilde y_k noktalarını alarak, E kümesini E_k alt kümelerine, E_1, E_2 kümelerini de,

$E_k^{(1)}$ ve $E_k^{(2)}$

şeklinde ayrık altı kümelere ayıralım. Bu halde,

$E_k = E_k^{(1)} \cup E_k^{(2)}$ ve $m(E_k) = m(E_k^{(1)}) + m(E_k^{(2)})$

Yazılır. Buradan,

$\int_E f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} y_k m(E_k)$

$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} y_k m(E_k^1) + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} y_k m(E_k^2)$

$= \int_{E1} f(x)dx + \int_{E2} f(x)dx$

Yazılır. Bu eşitliğin ilk ve son terimleri, istenen sonucu verir.

Teorem 7: f(x) fonksiyonu bir E kümesinde sınırlı ve ölçülebilir olsun. Bu halde, herhangi bir c sabiti için

$\int_E [f(x) + c\,]dx = \int_E f(x)dx + cm(E)$

Yazılır.

İspat 7: $\alpha < f(x) < \beta$ olsun. Ayrıca,

$\alpha = y_0 < y_1 < \ldots < y_{n-1} < y_n = \beta$

Şeklinde bir bölüntü alalım.

$E_k = \{x : x \in E, y_{k-1} \leq f(x) < y_k\}$

Olmak üzere üst toplam,

$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} y_k m(E_k)$

Biçiminde yazılır. Benzer olarak, f(x) + c toplamı ile ilgili üst toplam,

$S_1 = \sum_{k=1}^{n} (y_k + c)m(E_k) = \sum_{k=1}^{n} y_k m(E_k) + \sum_{k=1}^{n} cm(E_k)$

Veya $S_1 = S + cm(E)$ olur. her iki tarafın $n \to \infty$ limitleri alınırsa,

$\int_E [f(x) + c\,]dx = S = \lim_{n\to\infty} S_1 = \lim_{n\to\infty} S + cm(E) = \int_E f(x)dx + cm(E)$

Soru 1: $\int_0^\infty \frac{sinx}{x}$ dx integralinin var olduğunu gösteriniz.

Çözüm 1: (sinx)/x fonksiyonu (0, 1) aralığında sürekli olduğundan

$\int_0^1 \frac{sinx}{x}$ dx

Biçiminde Riemann integrali vardır. Buna göre parçalı integralle,

$\int_0^b \frac{sinx}{x}$ dx = - $\frac{cosx}{x}$ $|_1^b$ - $\int_1^b \frac{cosx}{x^2}$ dx

=cos1 – (cosb)/b - $\int_1^b \frac{cosx}{x^2}$ dx

olur. Ayrıca

$|\int_1^b \frac{cosx}{x^2}$ dx | $\leq \int_1^b |\frac{cosx}{x^2}|$ dx $\leq \int_1^b \frac{dx}{x^2}$ = 1- 1/b

Olacağı kolaylıkla görülür. Buradan b → ∞ limiti alınırsa Riemann integrali olarak,

$\lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{cosx}{x^2} dx = \int_1^\infty \frac{cosx}{x^2}$ dx

Vardır. Öte yandan,

$\int_0^b \frac{sinx}{x}$dx = $\int_0^1 \frac{sinx}{x}$dx + $\int_1^b \frac{sinx}{x}$dx

Olacağı için,

$\int_0^\infty \frac{sinx}{x}$dx = $\lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{sinx}{x} dx$ = $\int_0^1 \frac{sinx}{x}$dx + $\int_1^\infty \frac{sinx}{x}$dx

Yazılır. Bu eşitliğin sağ tarafındaki son iki integral var olduğundan, sol kısımdaki integralin de varlığından bahsedebiliriz.

Teorem 8: f(x) fonksiyonu bir A kümesinde sınırlı ve ölçülebilir olsun. Eğer A’ ⊆ A ise, f(x) fonksiyonunun A’ kümesinde Lebesgue integrali vardır.

İspat 8: f(x) fonksiyonu bir A kümesinde sınırlı ve ölçülebilir olduğundan teorem3’ e göre, bu fonksiyon A kümesinde integrallenebilir. A’ ⊆ A kapsamından m(A’) ≤ m(A) yazılır. Böylece,

$\int_{A'} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} y_k m(A') \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} y_k m(A) = \int_A f(x)dx < \infty$

Yazabildiğimizden, f(x) fonksiyonu A’ kümesinde Lebesgue anlamında integrallenebilir.

Teorem 9: Eğer g(x) fonksiyonu bir E kümesinde integrallenebiliyor ve yine E kümesinde |f(x)| ≤ g(x) eşitsizliği sağlanabiliyorsa, f(x) fonksiyonu da bu E kümesinde integrallenebilir.

İspat 9: $f(x) \leq |f(x)| \leq g(x)$ olduğundan,

$$\int_E f(x)\,dx \leq \int_E |f(x)dx| \leq \int_E g(x)\,dx < \infty$$

yazılabilir. Buradan,

$$\int_E f(x)\,dx < \infty$$

Elde edilir. Bu da f(x) fonksiyonunun E kümesinde integrallenebildiğini gösterir.

Teorem 10: Eğer f(x) ve g(x) fonksiyonları bir E kümesinde integrallenebiliyorsa, f(x)g(x) çarpım fonksiyonu da E kümesinde integrallenebilir. Yani,

$$\int_E f(x)g(x) < \infty$$

olmalıdır.

İspat 10:

$$f(x)g(x) \leq \frac{1}{2}|f(x)|^2 + \frac{1}{2}|g(x)|^2$$

eşitsizliği her zaman doğrudur. Öte yandan,

$$|f(x)|^2 \leq 2M^2 \text{ ve } |g(x)|^2 \leq 2N^2$$

Denirse $f(x)g(x) \leq M^2 + N^2 = P$ ile sınırlıdır. Ayrıca teorem3 e göre E kümesinde Lebesgue integrali vardır. Diğer yandan,

$$0 \leq (|f(x)| - |g(x)|)^2 = |f(x)|^2 + |g(x)|^2 - 2|f(x)g(x)|$$

Eşitsizliği göze alınırsa,

$$|f(x)| - |g(x)| \leq \frac{1}{2}[|f(x)|^2 + |g(x)|^2]$$

yazılır. Buradan,

$$\int_E f(x)g(x) \leq \frac{1}{2}\left[\int_E |f(x)|^2dx + \int_E |g(x)|^2dx\right] \leq Pm(E) < \infty.$$

Soru 2: (Tchebichev Eşitsizliği) A kümesi üzerinde $F(x) \geq 0$ ise,

$\mu\{x : x \in A, F(x) \geq c\} \leq \frac{1}{c} \int_A F(x) d\mu$

eşitsizliği sağlanır.

Çözüm 2: $A' = \{x : x \in A, F(x) \geq c\}$ olsun $A = (A \backslash A') \cup A'$ olduğundan

$$\int_A F(x) d\mu = \int_{A'} F(x) d\mu + \int_{A \backslash A'} F(x) d\mu \geq \int_{A'} F(x) d\mu > c\mu(A')$$

Eşitsizliği elde edilir. Buradan,

$$\frac{1}{c} \int_A F(x) d\mu \geq \mu(A') = \mu\{x : x \in A, F(x) \geq c\}$$

Olduğunu gösteririz.

5.2. SINIRSIZ FONKSİYONLARIN LEBESGUE İNTEGRALİ

Genel olarak, sınırsız fonksiyonların Riemann integrali yoktur. Buna karşın, çoğu kez Lebesgue anlamında integrallenebilir. Bu kısımda daha önceden bulduğumuz sonuçları sınırsız ve ölçülebilir fonksiyonlara genişleteceğiz. Özel olarak $\mathcal{E} \rightarrow 0$ giderken

$$(R) \int_{\mathcal{E}}^{1} |f(x)| dx$$

Bicinde olan Riemann integrali sonlu bir limite varıyorsa her f(x) fonksiyonu [0, 1] aralığında Lebesgue anlamında integrallenebilir ve

$$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{\mathcal{E} \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{E}}^{1} f(x) dx$$

olur. Bu tür dengesiz integraller,

$$\lim_{\mathcal{E} \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{E}}^{1} |f(x)| dx = \infty$$

olduğu zaman Lebesgue anlamında integrallenemezler.

Önce, $f(x) \geq 0$ fonksiyonunun sınırsız ve ölçülebilir olduğunu kabul edelim. p doğal sayısı için,

$$[f(x)]_p = \begin{cases} f(x), & tüm\ x \in E\ için\ f(x) \leq p \\ p\ , & tüm\ x \in E\ için\ f(x) \geq p \end{cases} \quad (1)$$

Olarak tanımlarsak her p doğal sayısı için, $[f(x)]_p$ fonksiyonu sınırlı ve ölçülebilirdir. Böylece, $[f(x)]_p$ fonksiyonu E kümesinde Lebesgue anlamında integrali vardır. Buna göre f(x) fonksiyonun integrali

$$\int_E f(x)dx = \lim_{P\to\infty} \int_E [f(x)]_P dx \quad (2)$$

Olarak tanımlanır. Buradaki limit ya pozitif bir sayı ya da sonsuzdur. Eğer limit pozitif bir sayı ise, f(x) fonksiyonunun Lebesgue anlamında integrali vardır. İntegralin değeride bu limite eşittir. Aksi durumda limit yoksa f(x) Lebesgue anlamında integrallenemez.

Eğer $f(x) \leq 0$ ise f(x) fonksiyonunun E kümesinde Lebesgue integrali,

$$\int_E f(x)dx = - \int_E |f(x)|dx \quad (3)$$

Olarak tanımlanır ve $|f(x)| \geq 0$ olduğu için (1) ve (2) ifadelerinin Lebesgue integrali olup olmadığı sonucuna bakılır. (3) eşitliğinin sağ kısmı bu söylediklerimizi elde etmemize yardımcı olur.

Eğer f(x) fonksiyonu keyfi işaretli ise, o halde

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x), & tüm\ x \in E\ için\ f(x) \geq 0 \\ 0\ , & tüm\ x \in E\ için\ f(x) < 0 \end{cases}$$

$$f^-(x) = \begin{cases} 0\ , & tüm\ x \in E\ için\ f(x) \geq 0 \\ -f(x)\ , & tüm\ x \in E\ için\ f(x) < 0 \end{cases}$$

Buradan

$f(x) = f^+(x) - f^-(x)$

yazılır. Böylece f(x) fonksiyonunun E kümesi üzeindeki integrali

$$\int_E f(x)dx = \int_E f^+(x)dx - \int_E f^-(x)dx \quad (4)$$

Eğer (4) eşitliğinin sağ yanındaki integraller aynı zamanda varsa, sol taraftaki integraller de vardır. Bu halde f(x) fonksiyonu E kümesinde Lebesgue anlamında integrallenebilirdir.

Soru 1: $[f(x)]_p$ (1) eşitliğinde tanımladığı şekilde olsun. Bu halde

$[f(x)]_p = \min\{f(x), p\}$ ve $\lim_{p\to\infty} [f(x)]_p = f(x)$

olur.

Çözüm 1: (1) eşitliği göz önüne alındığında $f(x) \leq p$ ise $[f(x)]_p = \min\{f(x), p\}$ ve $f(x) > p$ ise $[f(x)]_p = p = \min\{f(x), p\}$ olduğu hemen bulunur. Böylece her durumda $[f(x)]_p = \min\{f(x), p\}$ yazılır. öte yandan $\min\{f(x), \infty\} = f(x)$ olduğundan

$\lim_{p\to\infty} [f(x)]_p = \lim_{p\to\infty} \min\{f(x), p\} = f(x)$ elde edilir.

Soru 2: $\int_0^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$, $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$, $\int_0^2 \frac{dx}{x^2}$ integrallerinin var olup olmadığını gösterin varlar ise sonucunu yazın.

Çözüm 2: $[f(x)]_p$ fonksiyonunun,

$$[f(x)]_p = \begin{cases} \frac{1}{x^{1/3}}, & \frac{1}{x^{1/3}} \leq p \; veya \quad x \geq \frac{1}{p^3} \\ p \;, & \frac{1}{x^{1/3}} > p \; veya \quad x < \frac{1}{p^3} \end{cases}$$

Olarak tanımlayalım. Buna göre

$$\int_0^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{p\to\infty} \int_0^8 [f(x)]_p dx$$

$$= \lim_{p\to\infty} \left[\int_0^{1/p^3} p dx + \int_{1/p^3}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}\right]$$

$$= \lim_{p\to\infty} \left[px|_0^{1/p^3} + \frac{3}{2}x^{2/3}|_{1/p^3}^{8}\right] = 6$$

Olarak bulunur. Böylece birinci integral var ve değeri altıdır.

İkinci integral için,

$$[f(x)]_p = \begin{cases} \frac{1}{x^{1/2}}, & \frac{1}{x^{1/2}} \leq p \; veya \quad x \geq \frac{1}{p^2} \\ p \;, & \frac{1}{x^{1/2}} > p \; veya \quad x < \frac{1}{p^2} \end{cases}$$

Konumları tanımlarsak buna göre,

$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{p\to\infty} \int_0^4 [f(x)]_p dx = \lim_{p\to\infty} [\int_0^{1/p^2} p dx + \int_{1/p^2}^{8} \frac{dx}{\sqrt{x}}] = 4$

Olarak bulunur. Böylece integral vardır ve değeri dörttür.

Benzer yollar ile $\int_0^2 \frac{dx}{x^2} = \infty$ olacağı için bu integral bulunamaz.

Teorem 1: $f(x) \geq 0$ olsun. Bu halde,

$$\int_E f(x)dx$$

İntegralinin var olması için gerek ve yeter koşul,

$\int_E [f(x)]_p dx$

İntegralinin düzgün sınırlı olmasıdır.

İspat 1: $[f(x)]_p$ fonksiyonunun tanımı gereği,

$[f(x)]_1 \leq [f(x)]_2 \leq [f(x)]_3 \leq \ldots$

Yazılır. Böylece,

$\int_E [f(x)]_1 dx \leq \int_E [f(x)]_2 dx \leq \int_E [f(x)]_3 dx \leq \ldots.$

Şeklinde bir dizi elde etmiş oluruz. Bu dizinin p. Terimi,

$\int_E [f(x)]_p dx$

Biçiminde tek düze artandır. Eğer bu dizi düzgün sınırlı ise tüm p değerleri için,

$\int_E [f(x)]_p dx < M$

Olacak şekilde bir M sayısı vardır. Buna göre,

$\lim_{p\to\infty} \int_E [f(x)]_p dx = \int_E [f(x)]dx$

integrali vardır.

Tersine bakacak olursak,

$\int_E$ f(x)dx

integrali varolsun $[f(x)]_p \leq f(x)$ olduğundan

$\int_E [f(x)]_p dx \leq \int_E f(x)dx < M$

olur. Bu da,

$\int_E [f(x)]_p dx < M$

demektir. Yani tüm p değerleri için,

$\int_E [f(x)]_p dx$

integrali düzgün sınırlıdır.

Teorem 2: f(x) fonksiyonunun bir E kümesinde integrallenebilir olması için gerek ve yeter koşul |f(x)| fonksiyonunun aynı E kümesinde integrallenebilir olmasıdır. Bu halde,

$|\int_E f(x)dx| \leq \int_E |f(x)|dx$

Olur

İspat 2: önce $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ ve $|f(x)| = f^+(x) - f^-(x)$ eşitliğinden

$\int_E f(x)dx = \int_E f^+(x)dx - \int_E f^-(x)dx$

Ve

$\int_E |f(x)|dx = \int_E f^+(x)dx - \int_E f^-(x)dx$

Oldukları kolayca görülebilir. Bu iki eşitlikten f(x) fonksiyonunun bir E kümesinde integrallenebiliyor olması için gerek ve yeter koşul |f(x)| fonksiyonunun aynı E kümesi üzerinde integrallenebilmesidir. Değer bir deyişle f(x) fonksiyonunun bir E kümesinde integralinin olması için aynı fonksiyonunun mutlak değer içindeki değerinin aynı E kümesinde integralinin mevcut olmasıdır. Öte yandan,

$|\int_E f(x)dx| = |\int_E f^+(x)dx - \int_E f^-(x)dx| \leq |\int_E f^+(x)dx| + |\int_E f^-(x)dx|$

$= \int_E f^+(x)dx + \int_E f^-(x)dx = \int_E |f(x)|dx$

Yazılır. Bu eşitsizliğin ilk ve son terimlerine bakacak olursak

$|\int_E f(x)dx \,| \leq \int_E |f(x)|dx$

Sonucunu elde ederiz.

5.2.1 Sınırsız Fonksiyonların Lebesgue İntegralleri ile İlgili Bazı özellikler:

1) Eğer bir E kümesi ölçümü sıfırsa,

$\int_E f(x)dx = 0.$

2) $A \subseteq E$ ölçülebilir bir küme olsun. Eğer $\int_E f(x)dx$ integrali varsa, $\int_A f(x)dx$ integrali vardır. $\int_A |f(x)|dx \leq \int_E |f(x)|dx$ eşitsizliği yazılır.

3) $E_1, E_2, E_3 \ldots$. Kümeleri ikişer ikişer ayrık ve $E = E_1 \cup E_2 \cup \ldots$ olsun. Eğer, $\int_E f(x)dx$ integrali varsa, $\int_E f(x)dx = \int_{E_1} f(x)dx + \int_{E_2} f(x)dx + \ldots$

4) a_1 ,a_2, …, a_n sayıları birer sabit ve $f_1(x)$, $f_2(x)$, …., $f_n(x)$ fonksiyonları da integrallenebilir olsun. Bu halde,

a) $\int_E [a_1 f_1(x) + \ldots + a_n f_n(x)]dx = a_1 \int_E f_1(x)dx + \ldots + a_n \int_E f_n(x)dx$

b) $\int_E f_1(x) \ldots f_n(x)dx < \infty$

İntegrallerivardır.

5) f(x) fonksiyonu bir E kümesinde integrallenebilir olsun. Eğer $< E_k >$, $\lim_{k \to \infty} m(E_k) = 0$ olacak şekilde E kümesinde kapsanan bir dizi ise, $\lim_{k \to \infty} \int_{E^k} f(x)dx = 0$ olur.

Teorem 3: Eğer f(x) fonksiyonu bir E kümesinde integrallenebilir ve her $\mathcal{E} > 0$ sayısı için, $m(A) < \delta$ ise

$|\int_A f(x)dx \,| < \mathcal{E}$

Olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı ve $A \subseteq E$ kümesi vardır.

İspat 3: f(x) fonksiyonu E kümesinde integrallenebilir olduğu için teorem1 e göre |f(x)| fonksiyonu da E kümesinde integrallenebilir. Böylece verilen $\mathcal{E}_1 > 0$ sayısı için,

$$\int_E (|f(x)| - [|f(x)|]_{p0})\, dx < \mathcal{E}_1 \qquad (1)$$

Olacak şekilde bir p_0 sayısı vardır. (1) ifadesindeki integrali alınan terim negatif değildir. Eğer A, E kümesinin ölçülebilir bir alt kümesi ise 2. Özellikten dolayı,

$$\int_A (|f(x)| - [|f(x)|]_{p0})dx \leq \int_E (|f(x)| - [|f(x)|]_{p0})\, dx \qquad (2)$$

Eşitsizlikleri yazılır. (1) ve (2) eşitsizliklerinden

$$\int_A |f(x)| < \mathcal{E}_1 + \int_A [|f(x)|]_{p0}dx \qquad (3)$$

Olduğunu görürüz. Öte yandan,

$[|f(x)|]_{p0} \leq p_0$

Olduğu için,

$\int_A [|f(x)|]_{p0}dx \leq p_0 m(A)$

Eşitsizliğini yazarız. Bunu (3) denklemde kullanacak olursa,

$$\int_A |f(x)|dx < \mathcal{E}_1 + p_0 m(A) \qquad (4)$$

Olur. $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}/2$ ve $m(A) \leq \delta = \mathcal{E}/2p_0$ olarak seçilirse (4) eşitsizliğinden,

$|\int_A f(x)dx| \leq \int_A |f(x)|dx < \mathcal{E}$

Teorem 4(Lebesgue Yakınsak Teoremi):

$< f_n(x) >$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$

Olacak şekilde E kümesinde ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi olsun. Bu halde $|f_n(x)| \leq M(x)$ olacak şekilde E kümesinde integrallenebilen bir M(x) varsa,

$\lim\limits_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx = \int_E f(x)dx = \int_E \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)dx$

Eşitlikleri yazılabilir.

İspat 4: $|f_n(x)| \leq M(x)$ olduğu için, $|f(x)| \leq M(x)$ eşitsizliği vardır. Böylece f(x) fonksiyonu E kümesinde integrallenebilir. Öte yandan,

$$\left|\int_E [f(x) - f_n(x)]dx\right| \leq \int_E |f(x) - f_n(x)|dx$$

Eşitsizliği kolayca yazılır. Buna göre,

$$\lim_{n\to\infty} \int_E |f(x) - f_n(x)|dx = 0 \qquad (1)$$

Olduğunu göstermek yetecektir.

$$\int_E |f(x) - f_n(x)|dx = \int_{S_n} |f(x) - f_n(x)|dx + \int_{R_n} |f(x) - f_n(x)|dx \qquad (2)$$

Eşitliğini yazdık. S_n kümesinde $|f(x) - f_n(x)| < \mathcal{E}$ *olur.* Aynı zamanda, $|f_n(x)| \leq M(x)$ ve $|f(x)| \leq M(x)$ olduğu için

$$|f(x) - f_n(x)| \leq |f(x)| + |f_n(x)| \leq 2M(x)$$

Yazılır. Ortalama değer teoremi kullanılırsan (2) eşitliğinden

$$\int_E |f(x) - f_n(x)|dx \leq \mathcal{E}m(S_n) + 2\int_{R_n} M(x)dx \qquad (3)$$

Eşitsizliği elde edilir. Ayrıca,

$$\int_E M(x)dx = \int_{E_1} M(x)dx + \int_{E_2} M(x)dx + \ldots$$

$$= \int_{E_1} M(x)dx + \ldots + \int_{E_n} M(x)dx + \int_{R_n} M(x)dx$$

Olarak tanımlanan seri yakınsak olduğundan $n \to \infty$ giderse,

$$\int_{R_n} M(x)dx \to 0$$

Olur. Öte yandan,

$$\lim_{n\to\infty} m(S_n) = m(E)$$

Olduğu için (3) eşitsizliğinden,

$$\lim_{n\to\infty} \int_E |f(x) - f_n(x)|dx \leq \mathcal{E}m(E)$$

Olarak yazılır. $\mathcal{E}$ Keyfi bir sayı olarak verildiğinden sıfıra götürebilir. Böylece $\mathcal{E} \rightarrow 0$ giderse

$$\lim_{n\to\infty} \int_E |f(x) - f_n(x)|dx = 0$$

Bulunur. Bu da,

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx = \int_E f(x)dx = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$$

5.3. Riemann ile Lebesgue integrali arasındaki ilişki

Bu kısımda Riemann integrali ile Lebesgue integrali arasındaki ilişkiyi inceleyeceğiz

Önerme 1: f: [a, b] → R fonksiyonu sürekli ise f integrallenebilirdir ve $F(x) = \int_a^x f\,dm$ biçiminde tanımlanan F fonksiyonu a < x < b için türevlenebilir olup F' = f dir.

Önerme 2: f : [a, b] → R fonksiyonu sınırlı olsun.

- f fonksiyonu Riemann integrallenebilir olması için gerek ve yeter koşul f fonksiyonunun [a, b] aralığında Lebesgue ölçüsüne göre hemen hemen her yerde sürekli olmasıdır
- [a, b] aralığında Riemann integrallenebilir fonksiyonlar [a, b] aralığında Lebesgue integrallenebilirdir ve bu integraller birbirine eşittir.

Örnek 1: [0, 1] aralığı üzerinde,

$$f(x) = \begin{cases} 1/n \ ; & x = m/n \in Q \\ 0 \ ; & x \notin Q \end{cases}$$

Dirichlet fonksiyonu hemen hemen her yerde süreklidir, dolayısıyla Riemann integrallenebilir ve böylece f in Riemann integrali Lebesgue integraline eşittir. Ayrıca integralin sonucu 0 dır zira f, Q sıfır kümesi dışında sıfırdır. Buna karşın [0, 1] aralığı üzerinde

$$g(x) = \begin{cases} 1; & x \in Q \\ 0; & x \notin Q \end{cases}$$

fonksiyonunun Riemann integrali hiçbir aralıkta yoktur zira bu fonksiyonun süreksizlik noktalarının kümesi [0, 1] aralığındadır ve bu aralığın ölçüsü > 0 dır. Bununla birlikte, hatırlanacağı gibi g(x) fonksiyonun Lebesgue integrali vardır ve değeri sıfıra eşittir.

Örnek 2: (Birinci tür genelleştirilmiş Riemann integralleri)

Birinci tür genelleştirilmiş Riemann integrali,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty, b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$$

Biçiminde tanımlanır. f : R → R fonksiyonu için birinci tür genelleştirilmiş Riemann integrali var olsun. Bu durumda $\int_a^b f(x)dx$ Riemann integrali her sınırlı [a, b] aralığı için var olur, dolayısıyla f, her bir [a, b] aralığı üzerinde hemen hemen her yerde sürekli olur. Ancak bunun tersi doğru değildir. Örneğin,

$$f(x) = \begin{cases} 1; & x \in [n, n+1) \; ve \; n \; çift \\ -1; & x \in [n, n+1) \; ve \; n \; tek \end{cases}$$

fonksiyonu hemen hemen her yerde süreklidir. Fakat üstteki limitler yoktur ve dolaysıyla genelleştirilmiş Riemann integrali yoktur.

Teorem 1: f ≥ 0 ve f in birinci tür genelleştirilmiş Riemann integrali varsa f in R üzerinde Lebesgue integrali vardır ve bu integral genelleştirilmiş integrale eşittir.

Örnek 3(İkinci tür genelleştirilmiş Riemann integrali):

İkinci tür genelleştirilmiş Riemann integrali aşağıda sağ kısımdaki limitler var olduğu sürece

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^-} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx \text{ ve } \int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

Biçiminde tanımlanır.

6. SONUÇ

Tasarım konum olan Lebesgue integrali 1875 yılı doğumlu Henri Leon Lebsgue tarafından bulunmuştur. Bu integral türünü anlamak adına öncelikle cebir kavramını, ölçüm ve ölçüm uzayını ardından ölçülebilir fonksiyonlar konularını incelemek gerekmektedir. Bu incelenen başlıkların öncülüğünde Lebesgue integrali ile Riemann integrali arasındaki farklılıkları göze çarpar. Lebesgue integralinin en somut ve kolay yorumlarından biri, bir eğri altındaki alanın sonlu bir integral olarak verilmesidir.

Lebesgue integralinin temel kaynağı, Riemann integralinin elde edilmesinin aksine, X ekseni üzerindeki x noktalarının yakınlığı ile gruplanmaları değil, fonksiyonların bu noktalardaki değerlerinin yakınlıklarıyla gruplanmalarıdır. Bu yöntem integral kavramının oldukça geniş bir sınıfta genelleştirilmesine olanak sağlar.

Kaynakça

1) ÇAPAR U, (2013), ÖLÇÜ KURUMSAL OLASILIK VE STOKASTİK KALKÜLÜSE GİRİŞ, ODTÜ yayıncılık
2) BALCI M, (2000), REEL ANALİZ, BALCI yayınları
3) GÖK Ö, (1997), REEL ANALİZ, YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ BASIM-YAYIN
4) DÖNMEZ A. (2001), REEL ANALİZ, SEÇKİN yayıncılık
5) ŞAMİLOV A, (2007), ÖLÇÜM TEORİSİ, OLASILIK VE LEBESGUE İNTEGRALİ, ANADOLU ÜNİVERSİTESİ
6) TAO T, (2009), ANALYSIS II, HINDUSTAN BOOK AGENCY
7) MISIROĞLU T, (2011), REEL ANALİZ, http://en.calameo.com/read/00335903448b3aaf085e6
8) https://yorumkalemi.com/threads/kuemeler-cebiri-sigma-cebir-ve-borel-cebiri.1960
9) https://acikders.ankara.edu.tr/course/view.php?id=80

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad	Fethi Fırat TÜLÜ
Doğum Tarihi	25.07.1995
Doğum yeri	Lüleburgaz/Kırklareli
Lise	2009- 2013 Lüleburgaz Lisesi
Staj Yaptığı Yerler	Garanti Emeklilik ve Hayat A.Ş -İstanbul-
	Cimri.com -İstanbul-
	Gtech Veri Teknolojileri Akademisi -İstanbul-
	LeasePlan -İstanbul-