T.C

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

KİMYA METALURJİ FAKÜLTESİ

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ

BİTİRME ÇALIŞMASI

LAGUERRE FONKSİYONU

DANIŞMAN

DR. ÖĞR. ÜYESİ YASEMEN UÇAN

13052068

FETHİ FIRAT TÜLÜ

İstanbul,2019

T.C

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

KİMYA METALURJİ FAKÜLTESİ

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ

BİTİRME ÇALIŞMASI

LAGUERRE FONKSİYONU

DANIŞMAN

DR. ÖĞR. ÜYESİ YASEMEN UÇAN

13052068

FETHİ FIRAT TÜLÜ

İstanbul,2019

İSTANBUL 2019

ÖNSÖZ

Bitirme çalışmam boyunca, bana yardımcı olan, yol gösteren, güler yüzünü eksik etmeyen danışmanım Sayın Dr. Öğr. Üyesi Yasemen UÇAN'a teşekkür ederim. Bu bitirme çalışmasının ortaya çıkmasında ve lisans eğitimim boyunca bana durmaksızın destek veren kız arkadaşım Miray KALKAN'a ve kadim dostlarıma teşekkür ederim. Eğitim-Öğretim hayatımda ve hayatımın her anında yanımda olan, bizi bu günlere getirirken her türlü fedakârlığı yapan aileme, kardeşime teşekkürlerimi ve şükranlarımı borç bilirim.

Aralık 2019
Fethi Fırat TÜLÜ

İÇİNDEKİLER

Sembol Listesi

$L_n\ (x)$	Laguerre Fonksiyonu
lim	Limit
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar Kümesi
ln	e Tabanında Logaritma
d	Diferansiyel Form
∂	Kısmi Diferansiyel Form
c_1, c_2	Keyfi Sabit Değer

Şekil Listesi

ÖZET

Bu bitirme çalışmasında bir özel fonksiyon olan Laguerre Polinomları incelenmiştir. Çalışma altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde bitirme çalışmasının konu tanıtımı ve giriş yapılmıştır. İkinci bölümde Laguerre Diferansiyel Denklemine giriş yapılmış olup, Laguerre polinomlarının çözüm yöntemlerine detaylıca değinilmiştir. Üçüncü bölümde ise polinom foksiyonu ve ortogonollik tanımları verilmiştir. Dördüncü bölümde Asosiye Laguerre Denklemlerine giriş yapılmış olup, çözüm yöntemlerine değinilmiştir. Beşinci bölümde ise bu polinomlar ile ilgili uygulama soruları çözülmüş olup, altıncı ve son bölümde bu çalışmadan elde edilen sonuçlardan bahsedilmiştir.

ABSTRACT

In this study, Laguerre Polynomials which is defined as a special function were examined. The study consists of six chapters. In first chapter, definition of the subject is made. Laguerre differential equations and solving methods of Laguerre polynomials are explained in the second chapter. In third chapter, orthogonality and polynomial function are defined.Associated Laguerre diferential equations and solving methods of Associated Laguerre polynomial function are explained in the fourth chapter.Apllication questios are solved in fifth chapter. In last chapter, results obtanined from this study are mentioned.

1. GİRİŞ

Bu araştırmanın hedefi, konusu ile özel bir fonksiyon olan Laguerre fonksiyonudur. İsim babası Edmond Laguerre (1834-1886), Laguerre denklemlerinin çözümü olan Laguerre fonksiyonları ile ilgili çalışmasını 1879'da yayınlamıştır. İkinci mertebeden bir lineer diferansiyel denklem olan Laguerre Diferansiyel denklemin çözümü olan Laguerre fonksiyonu, genel olarak fizik ve mühendislik problemlerinde karşımıza çıkar. Kuantum Mekaniği göz önüne alındığında Hidrojen atomunun Schrödinger denkleminin radyal kısmını çözümlemesinde ortaya çıkar[1].

Bu araştırmanın amacı Laguerre diferansiyel denkleminin çözümünden elde edilen polinom fonksiyonların (Laguerre polinomlarının) özelliklerini incelemektir. Bu kapsamda ikinci bölümde Laguerre diferansiyel denklemi tanıtılarak çözümleri verilecektir. Üçüncü bölümde polinom fonksiyonlarının tanımı yapılacak, ortogonallik ve ortonormal sistemlerden bahsedilecektir. Yine bu kapsamda Laguerre polinomunun ortogonalliği bu bölümde anlatılacaktır. Dördüncü bölümde Asosiye Laguerre diferansiyel denklemi ve Asosiye Laguerre polinomuna değinilecektir. Beşinci bölümde bu çalışmayı kapsayan uygulama soruları verilmiştir. Son ve altıncı bölümde ise çalışmadan çıkarılan sonuç bulunmaktadır.

2. LAGUERRE DİFERANSİYEL DENKLEMİ

Bu bölümde Laguerre diferansiyel denklemi tanıtılacak, diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılan Frobenius Yöntemi tanıtılacak ve Laguerre polinomlarına giriş yapılacaktır.

Laguerre Diferansiyel Denklemi

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0 \tag{2.1}$$

$$y'' + \frac{(1-x)}{x}y' + \frac{n}{x}y = 0$$

(2.1) şeklinde ifade edilebilen denklemlere Laguerre diferansiyel denklemi denir. Burada n üzerinde henüz kısıtlama olmayan sabit bir sayıdır.

2.1 Frobenius Yöntemi ile Çözüm

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0 \tag{2.2}$$

$$y'' + \frac{Q(x)}{P(x)}y' + \frac{R(x)}{P(x)}y = 0$$

$P(x)$, $Q(x)$ ve $R(x)$ polinomlar olmak üzere, $P(x) = 0$ kabul edilen $x = x_0$ noktasına tekil (singülar) nokta denir. Bu nokta dışındaki tüm noktalar adi (sıradan) noktalar olarak adlandırılır. Diferansiyel denklemin $x = x_1$ adi noktası ise

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_1)^n \tag{2.3}$$

şeklinde çözümlerin olduğu söylenmektedir. $x = x_0$ noktasında çözüm arayabilmek için $(x - x_0)P(x)$ ve $(x - x_0)^2 Q(x)$ analitik oluyor ise $P(x)$ ve $Q(x)$ kuvvet serisi şeklinde yazılabilir.

$lim_{x \to x_0}(x - x_0)P(x)$ ve $lim_{x \to x_0}(x - x_0)^2 Q(x)$ mevcut ise bu durumda $x = x_0$ noktasına düzgün tekil nokta denir. Aksi durumda ise düzgün olmayan tekil nokta adı verilir.

$x = x_0$ düzgün tekil noktası civarında

$$y = (x - x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \tag{2.4}$$

belirtilen formüle göre çözüm aramaya Frobenius yöntemi denir. Aynı zamanda, $x_0 = 0$ düzgün tekil nokta ise

$$y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \tag{2.5}$$

üzerinde çözüm aramaya yine Frobenius yöntemi denir[2].

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n + r)\, a_n x^{n+r-1} \tag{2.6}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n + r)\,(n + r - 1) a_n x^{n+r-2}$$

y' ve y'' denklemde yerine yazıldığında,

$$x^r[r(r - 1)a_0 + \cdots] + (P_0 + P_1 + P_2 x^2 + \cdots)x^r(ra_0 + \cdots) + (Q_0 + Q_1 x + \cdots)x^r(a_0 + a_1 x + \cdots) = 0 \tag{2.7}$$

ifadesinde x'in kuvvetlerinin katsayılarının sıfıra eşitlenmesi ile a_n katsayılarına göre bir lineer denklem sistemi elde edilir. Bu sistemdeki en küçük kuvvetli x^r ifadesinin çarpanı;

$$(r(r + 1) + P_0 r + Q_0)a_0 = 0 \tag{2.8}$$

$$f(r) = r(r - 1) + P_0 r = 0 \tag{2.9}$$

verilen diferansiyel denklemin indis denkleminin köklerine de denkleminin üstleri denir. Böylece tekil nokta civarındaki çözümün davranışı bu indis denkleminin köklerine bağlıdır.

Teorem: $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$ diferansiyel denkleminin $x = 0$ düzgün tekil noktası ise $xP(x)$, $x^2Q(x)$ ve $\rho > 0$ olmak üzere ve $xP(x)$ ve $x^2Q(x)$ verilerinin yakınsaklık yarıçaplarının minimumu olmak üzere $|x| < \rho$ için

$$xP(x) = \sum_{m=0}^{\infty} P_m x^m \tag{2.10}$$

$$x^2Q(x) = \sum_{m=0}^{\infty} Q_m x^m \tag{2.11}$$

serileri yakınsaktır denir[3].

$$f(r+n) = (r+n)(r+n-1) + P_0(r+n) + Q_0 = 0 \tag{2.12}$$

indis denkleminin $r_1 \geq r_2$ olacak şekilde iki kökü olsun. Bu durumda $-\rho < x < 0$ veya $0 < x < \rho$ aralığının birinde denklemin

$$y_1(x) = x^{r_1}\left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_0\,(r_1)x^n\right] \tag{2.13}$$

formülü ile verilmiş bir y_1 çözümü bulunur. Diğer çözüm yani y_2 çözümü ise indis denkleminden elde edilen kökler arasındaki bağıntıya göre verilir.

1. Durum:

Eğer $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$; $(r_2 - r_1) = 0$ veya $(r_2 - r_1) = r \in \mathbb{N}$ olmaması durumunda;

$$y_2(x) = x^{r_2}\,[\,a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, r_2 x^n] \tag{2.14}$$

lineer bağımsız çözümü bulunur.

2. Durum:

Eğer $r_1 = r_2$ ise;

$$y_2(x) = \frac{\partial}{\partial r} y_1(x_1 r) = y_1(x)\ln(x) + x^{r_1}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dr} a_n(r)\,|_{r=r_1} x^n\right)$$

(2.15)

ikinci lineer bağımsız çözüm bulunur.

3. Durum:

Eğer $r_1 - r_2 = r \in \mathbb{N}$ ise;

$$y_2(x) = k y_1(x)\ln(x) + x^{r_2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dr}(r - r_2) a_n(r)\,|_{r=r_2} x^n\right)$$

(2.16)

$$k = \lim_{r \to r_2}(r - r_2) a_n(r)$$

(2.17)

olmak üzere ikinci lineer bağımsız çözümü bulunur[3].

2.2 Laguerre Diferansiyel Denkleminin Frobenius Yöntemi ile Çözümü

(2.1) şeklinde verilen Laguerre denklemine,

$$y(x,s) = \sum_{r\,=\,0}^{\infty} a_r x^{s+r}$$

(2.18)

şeklinde bir seri çözüm denersek, indis denklemin köklerinin ikisininde 0 ve tekrarlama bağıntısınında,

$$a_{r+1} = a_r \frac{(s + r - n)}{(s + r + 1)^2}$$

(2.19)

olduğunu görürüz. Frobenius metodunda denklemin,

$s = 0$
gibi çift kökü varsa birbirinden bağımsız çözümler,
$y(x, 0)$
ve
$$\frac{\partial y(x,s)}{\partial s}|_{s=0}$$
(2.20)

olarak alınırlar. Burada ikinci çözüm $x \to 0$ limitinde lnx gibi sonsuza gideceğinden, bütün x değerleri için sonlu olabilecek $y(x, 0)$ çözümü alınır. Bunun tekrarlama bağıntısı ise,

$$a_{r+1} = -a_r \frac{(n-r)}{(r+1)^2}$$
(2.21)

olur. Seri olarak yazarsak,

$$y(x) = a_0 \left\{1 - \frac{nx}{1^2} + \frac{n(n-1)}{1^2}x^2 + \cdots + \frac{(-1)^2 n(n-1)\ldots(n-r+1)}{(r!)^2}x^r + \cdots\right\}$$
(2.22)

elde ederiz. Bu seri ise, $x \to \infty$ limitinde e^x gibi sonsuza gittiğinden bütün x değerleri için sonlu çözümler için n parametresini tamsayı değerler ile sınırlarız. Bu durumda,

$$y(x) = a_0 \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{(r!)^2} x^r$$
veya
$$y(x) = a_0 \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{n!\,x^r}{(n-r)!\,(r!)^2}$$
(2.23)

şeklinde verilen ve Laguerre Polinomları olarak bilinen polinom çözümlerini elde ederiz.

2.3 Laguerre Polinomlarının Doğrucu Fonksiyonu

Laguerre polinomların doğrucu fonksiyonu $\varphi(x, t)$;

$$\varphi(x,t) = \frac{e^{\frac{-xt}{1-t}}}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} \ln(x)\, t^n$$
(2.24)

olarak verilir. Bunun (2.23) ile aynı polinomları verdiğini göstermek için, sol tarafı kuvvet serisi olarak açarsak,

$$\frac{1}{1-t}e^{\frac{-xt}{1-t}} = \frac{1}{1-t}\left[\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\frac{-xt}{1-x})^r}{r!}\right]$$

$$= \frac{1}{1-t}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r x^r t^r}{r!\,(1-t)^r}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!}\frac{1}{(1-t)^{r+1}}x^r t^r \tag{2.25}$$

olarak buluruz. Ayırca

$$\frac{1}{(1-t)^{r+1}} = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(r+s)}{r!\,s!}t^s \tag{2.26}$$

y_0 noktası civarında herhangi bir fonksiyonun Taylor Serisi $y = f(x)$ ise;

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)(x-x_0)}{1!} + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!} + \cdots + \frac{f^n(x_0)(x-x_0)^n}{n!}$$

sonucunda

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

gibi bir seri elde etmiş isek yapmamız gereken mutlaka D'alembert Testi ile yakınsaklık arağını da buluruz. Fonksiyonu Taylor Serisi'ne açtığımızda;

$$\frac{1}{(1-t)^{r+1}} = \sum_{r,s=0}^{\infty}\frac{(-1)^r (r+s)!}{s!\,(r!)^2}x^r t^{r+s}$$

$$= \sum_{r,s=0}^{\infty}\frac{(-1)^r n!}{(r!)^2 (n-r)!}x^r t^n \tag{2.27}$$

Bu noktada $r+s=n$ olsun $s=n-r$ olacağından, $s \geq 0$ şartını koşarsak $r \leq n$ olur ve buradan da

$$L_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{n!}{(r!)^2 (n-r)!} x^r \tag{2.28}$$

buluruz.

2.4. Laguerre Polinomlarının Rodriguez Formülü

Laguerre polinomlarının bir başka tanımı da,

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}) = \frac{1}{n!}(\frac{d}{dx} - 1)^n x^n \tag{2.29}$$

olarak yazılan Rodriguez formülüdür. Bu tanımın diğerlerine eşdeğerliğini,

$$\frac{d^n}{dx^n}(uv) = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} \frac{d^{n-r}u}{dx^{n-r}} \frac{d^r v}{dx^r} \tag{2.30}$$

formülünü kullanarak ve

$$\frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-z}) = \frac{e^x}{n!} \sum_{r=0}^{n} \frac{n!}{(n-r)!\,r!} \frac{d^{n-r}x^n}{dx^{n-r}} \frac{d^r e^{-x}}{dx^r} \tag{2.31}$$

ifadesini yazarak gösterebiliriz. Buradan ise,

$$\frac{d^p x^q}{dx^p} = q(q-1)\ldots(q-p+1)x^{q-q}$$

$$= \frac{q!}{(q-p)!} x^{q-p} \tag{2.32}$$

formülü ile,

$$\frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-z}) = \frac{e^x}{n!} \sum_{r=0}^{n} \frac{n!}{(n-r)!\,r!} x^r (-1)^r e^{-x}$$

$$= \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{n!\,x^r}{(r!)^2 (n-r)!} x^r$$

$$(2.33)$$

$= L_n(x)$

olarak istediğimiz neticeyi elde ederiz.

2.5 Laguerre Polinomları için Rekürans Bağıntıları

Daha önce (2.24) de göstermiş olduğumuz doğrucu fonksiyonunu sırası ile, t ve x'e göre türevlerini alarak aşağıdaki tekrarlama bağıntılarını;

$$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - nL_{n-1}(x) \tag{2.34}$$

$$xL'_n(x) = nL_n(x) - nL_{n-1}(x) \tag{2.35}$$

olarak buluruz. Ayrıca, bir başka tekrarlama bağıntısı olan,

$$L'_n(x) = nL_n(x) - \sum_{r=0}^{n-1} L_r(x) \tag{2.36}$$

formülü de çok kullanışlıdır.

2.6 Laguerre Polinomlarının Özel Değerleri

Doğrucu fonksiyonda (2.24) $x = 0$ alırsak,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \ln(0)\, t^n = \frac{1}{1-t} \tag{2.37}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} t^n$$

(2.38)

olur ve $L_n(0) = 1$ özel değerini buluruz. Ayrıca diğer bir özel değeri de, Laguerre denklemini $x = 0$ noktasında yazarsak,

$$x \frac{d^2 L_n(x)}{dx^2} + (1 - x) \frac{d}{dx} L_n(x) + n L_n(x) = 0|_{x=0}$$

(2.39)

$$L_n'(x) = -n$$

(2.40)

olarak buluruz.

$a = 0$ için özel durumdaki $L_n^{(a)}(x) = L_n(x)$ Laguerre polinomlarının ilk ifadeleri;

$$L_0(x) = 1$$

$$L_1(x) = 1 - x$$

$$L_2(x) = 1 - 2x + \frac{1}{2}x^2$$

$$L_3(x) = 1 - 3x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3$$

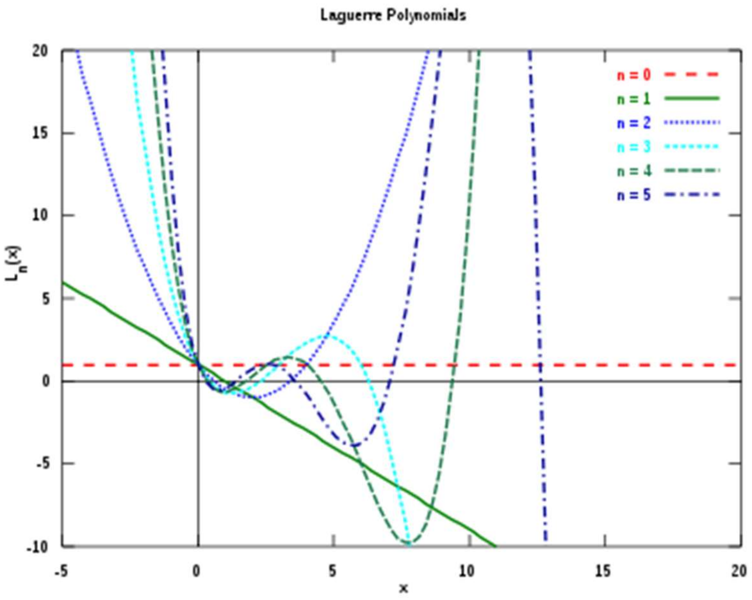
$$L_4(x) = 1 - 4x + 3x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{24}x^4$$

$$L_5(x) = 1 - 5x + 5x^2 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{5}{24}x^4 - \frac{1}{120}x^5$$

$$L_6(x) = 1 - \frac{1}{20}x + \frac{15}{2}x^2 - \frac{10}{3}x^3 + \frac{5}{8}x^4 - \frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{720}x^6$$

$$L_6(x) = 1 - 7x + \frac{21}{2}x^2 - \frac{35}{6}x^3 + \frac{35}{24}x^4 - \frac{21}{120}x^5 + \frac{7}{720}x^6 - \frac{1}{720}x^7$$

şeklinde yazılabilir[4].



Şekil 2.1 İlk Beş Laguerre Polinomu Görüntüsü

3. POLİNOM FONKSİYONU VE ORTOGONALLİK

Dördüncü bölümde polinom fonksiyonuna, fonksiyonların ortogonalliğine ve ortonormal sistemlere değinilecektir. Laguerre polinomunun dikliği (ortogonalliği) gösterilecektir.

3.1 Polinom Fonksiyonu

n bir doğal sayı ve $a_0,\ a_1, \ldots,\ a_n$ aynı zamanda $a_n \neq 0$ olmak üzere sabit sayılar olsun.

$$p(x) = a_n x^n + a_n x^{n-1} + \cdots a_0$$

şeklinde tanımlanmış $p : R \rightarrow R$ fonksiyonuna polinom denir. Burada $a_0,\ a_1, \ldots,\ a_n$ sayılarına polinomun katsayısı, n doğal sayısına ise polinomun derecesi denir.

3.2 Fonksiyonların Ortogonalliği

$$\vec{A} = a_1\vec{\imath} + a_2\vec{\jmath} + a_3\vec{k}$$

$$\vec{B} = b_1\vec{\imath} + b_2\vec{\jmath} + b_3\vec{k}$$

$\overrightarrow{A}.\vec{B} = 0$ ise bu vektörlere dik yani ortogonal denir.

Teorem: Herhangi bir $A(x)$ ve $B(x)$ fonksiyonları için $x_1,\ x_2,\ x_3$ değerleri önemli ve

$A(x_1) = a_1 , A(x_2) = a_2 , A(x_3) = a_3$

$B(x_1) = b_1 , B(x_2) = b_2 , B(x_3) = b_3$

olsun.

$$\sum_{i=0}^{3} a_i\, b_i = 0$$

ise $A(x)$ fonksiyonu $B(x)$ fonksiyonuna ortogonaldir denir.

Teorem: $A(x)$ fonksiyonu $I = [a, b]$ aralığında tanımlı herhangi bir fonksiyon olsun. $x_i \in I$ olmak üzere $A(x)$ fonksiyonunun bileşenleri sonsuz bir vektör olarak düşünülebilir. i değiştikçe x_i noktaları I aralığının tüm noktalarını taradığında yine

$$\sum_{i} a_i\, b_i = 0$$

yani;

$$\int_b^a A(x)B(x)dx = 0 \tag{3.1}$$

sağlanıyor ise $[a, b]$ aralığında $A(x)$ fonksiyonu $B(x)$ fonksiyonuna ortogonaldir. Böyle bir durum da $B(x)$ fonksiyonu $A(x)$ fonksiyonuna ortogonal olacağı aşikardır.

3.3 Ortonormal Sistemler

$g(x)$, $[a, b]$ aralığında pozitif bir fonksiyon olsun. $f_0(x)$ ve $f_1(x)$ reel fonksiyonlarının skaler çarpımı $[a, b]$ aralığında Lebesque integrali ile,

$$(f_0, f_1) = \int_a^b g(x) f_0(x) f_1(x) dx \tag{3.2}$$

olarak tanımlanır. $(f_0, f_1) = 0$ ise,

$$(f_0, f_1) = \int_a^b g(x) f_0(x) f_1(x) dx = 0$$

olacaktır, bu durumda $f_0(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında, $g(x)$ fonksiyonuna göre, $f_1(x)$ fonksiyonuna ortogonaldir denir. Genel olarak eğer,

$$\int_a^b g(x)f_i(x)f_j(x)dx = 0, \qquad i \neq j$$

ise $f_0(x), f_1(x), \dots, f_n(x)$ reel fonksiyonlar sistemine $[a, b]$ aralığında, $g(x)$ fonksiyonuna göre, ortogonal sistem mevcuttur denir. Bunlara ek olarak,

$$\int_a^b g(x)f_i^2(x)dx = 1, \qquad i = 1, 2, 3, \dots$$

koşulu da sağlanıyor ise sisteme ortonormal sistem denir. Özetlemek gerekirse,

$$\int_a^b g(x)f_i(x)f_j(x)dx = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \qquad (3.3)$$

ise $f_0(x), f_1(x), \dots, f_n(x)$ sistemi ortonormal bir sistem oluşturur[5].

3.4 Laguerre Polinomlarının Ortogonalliği

Laguerre polinomlarının birbirlerine dik fonksiyonlar seti oluşturduğunu göstermek için aşağıda verilmiş olan,

$$\int_0^\infty e^{-x} L_m(x)\, L_n(x)dx = 0 \qquad (3.4)$$

integralinin değerini hesaplayalım. Doğrucu fonksiyon tanımını kullanarak

$$\frac{1}{1-t} exp\left\{-\frac{xt}{(1-t)}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^n \qquad (3.5)$$

ve

$$\frac{1}{1-s}exp\left\{-\frac{xs}{(1-s)}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} L_m(x)s^m$$

(3.6)

yazalım. Yukarıdaki serileri önce birbirleri ile ve sonra da e^{-x} ile çarparsak,

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} L_n(x)\, L_m(x) t^n t^m = \frac{e^{-x}exp\left\{-\frac{xt}{(1-t)}\right\}}{(1-t)} \frac{exp\left\{-\frac{xs}{(1-s)}\right\}}{(1-s)}$$

(3.7)

elde ederiz. Her iki tarafın da x'e göre integralini alırsak,

$$\sum [\int_0^{\infty} e^{-x} L_m(x)\, L_n(x) dx] t^n s^m$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}exp\left\{-\frac{xt}{(1-t)}\right\}}{(1-t)} \frac{exp\left\{-\frac{xs}{(1-s)}\right\}}{(1-s)} dx$$

(3.8)

yazabiliriz. Buradan (3.4) integralinin değerinin,

$$I = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}exp\left\{-\frac{xt}{(1-t)}\right\}}{(1-t)} \frac{exp\left\{-\frac{xs}{(1-s)}\right\}}{(1-s)}$$

(3.9)

olarak gösterilen I integralinin t ve s'nin kuvvetleri olarak açıldığında, $t^n s^n$ teriminin katsayısı olacağı görülür. Bu integrali

$$I = \frac{1}{(1-t)(1-s)} \int_0^{\infty} \exp\left\{-x\left(1 + \frac{t}{1-t} + \frac{s}{1-s}\right)\right\} dx$$

(3.10)

olarak yazarsak, kolayca alınır ve sırası ile,

$$I = I|_0^{\infty} = \frac{1}{(1-t)(1-s)} \left[\frac{-e^{\left[-x\left(1+\frac{t}{(1-t)}+\frac{s}{(1-s)}\right)\right]}}{1 + \left[\frac{t}{(1-t)}\right] + \left[\frac{s}{(1-s)}\right]} \right]$$

(3.11)

$$= \frac{1}{(1-t)(1-s)} \left[\frac{1}{1 + \left[\frac{t}{(1-t)}\right] + \left[\frac{s}{(1-s)}\right]} \right]$$

(3.12)

$$= \frac{1}{1 - st^n}$$

(3.13)

$$= \sum_{n=0}^{\infty} s^n t^n$$

(3.14)

ifadelerini elde ederiz. Bu da bize

$$\int_0^{\infty} e^{-x} L_m(x)\, L_n(x) dx = \delta_{nm}$$

integralini verir. Diğer polinomlardan farklı olarak Laguerre polinomları ağırlık fonksiyonu e^{-x}'e göre diktir deriz. Benzer şekilde ortogonal sistemler de kontrol edilebilir.

4. ASOSİYE LAGUERRE DENKLEMİ VE POLİNOMLARI

Bu bölümde Asosiye Laguerre diferansiyel denklemlere ve polinomlarına değinilecek ve özellikleri verilecektir.

4.1 Asosiye Laguerre Denklemi

$$xy'' + (k + 1 - x)y' + ny = 0 \tag{4.1}$$

şeklinde verilen denkleme Asosiye Laguerre Denklemi denir. Bu denklemin çözümü ise, aşağıdaki teorem kullanılarak bulunabilir [6].

Teorem: Eğer $Z(x)$ fonksiyonu$(A + k)$ derecesinden Laguerre denklemini sağlarsa, $\frac{d^k Z(x)}{dx^k}$ fonksiyonu da Asosiye Laguerre denklemini sağlar.

İspat: $(n + k)$ derecesinden Laguerre denklemini,

$$x\frac{d^2Z}{dx^2} + (1 - x)\frac{dZ}{dx} + (n + k)Z = 0 \tag{4.2}$$

şeklinde yazar ve k kere türevini alırsak

$$x\frac{d^{k+2}Z}{dx^{k+2}} + k\frac{d^{k+1}Z}{dx^{k+1}} + (1 - x)\frac{d^{k+1}Z}{dx^{k+1}} + k(-1)\frac{d^kZ}{dx^k} + (n + k)\frac{d^kZ}{dx^k} = 0 \tag{4.3}$$

buluruz. Bu denklem düzenlenince bize,

$$x\frac{d^2}{dx^2}\left[\frac{d^kZ}{dx^k}\right] + (k + 1 - x)\frac{d}{dx}\left[\frac{d^kZ}{dx^k}\right] + n\left[\frac{d^kZ}{dx^k}\right] = 0 \tag{4.4}$$

olarak istenilen neticeyi verir.

Buradan Laguere polinomları için bulunduğumuz (2.28) ifadesini kullanırsak, Asosiye Laguerre polinomlarını

$$L_n^k(x) = (-1)^k\frac{d^k}{dx^k}\sum_{r=0}^{n+k}(-1)^r\frac{(n + k)!\, x^r}{(n + k - r)!\,(r!)^2} \tag{4.5}$$

şeklinde yazabilirz. x^r'nin k mertebesinden türevini r'nin k'dan küçük değerleri için sıfır vereceğinden,

$$L_n^k(x) = (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \sum_{r=k}^{n+k} (-1)^r \frac{(n+k)!\, x^r}{(n+k-r)!\,(r!)^2}$$
(4.6)

$$L_n^k(x) = (-1)^k \sum_{r=k}^{n+k} (-1)^r \frac{(n+k)!}{(n+k-r)!\,(r!)^2} \frac{r!}{(r-k)!} x^{r-k}$$
(4.7)

yazabiliriz. Yeni bir değişken olarak $s'yi$,

$$s = r - k \tag{4.8}$$

olarak tanımlarsak, Asosiye Laguerre polinomlarının son halini,

$$L_n^k(x) = (-1)^k \sum_{r=0}^{n+k} (-1)^s \frac{(n+k)!\, x^s}{(n-s)!\,(k+s)!\, s!}$$
(4.9)

şeklinde buluruz.

4.2 Asosiye Laguerre Polinomlarının Doğrucu Fonksiyonu

Asosiye Laguerre polinomlarının doğrucu fonksiyonu,

$$\frac{\exp\left[-\frac{xt}{(1-t)}\right]}{(1-t)^{k+1}} = \sum_{n=}^{\infty} L_n^k(x) t^s$$
(4.10)

şeklinde verilir. Bunun ispatı Laguere polinomlarının,

$$\frac{\exp\left[-\frac{xt}{(1-t)}\right]}{(1-t)^{k+1}} = \sum_{n=}^{\infty} L_n(x) t^n$$
(4.11)

şeklinde verilen doğrucu fonksiyonun k kere türevini almakla elde edilebilir.

$$\frac{d^k}{dx^k}\left[\frac{\exp\left[-\frac{xt}{(1-t)}\right]}{(1-t)^{k+1}}\right] = \frac{d^k}{dx^k} \sum_{n=k}^{\infty} L_n(x) t^n$$
(4.12)

bu ise,

$$[\frac{-t}{(1-t)}]^k \frac{\exp\left[-\frac{xt}{(1-t)}\right]}{(1-t)^{k+1}} = \frac{d^k}{dx^k}\sum_{n=0}^{\infty} L_{n+k}(x)\, t^{n+k}$$

(4.13)

şeklinde yazılabilir ve

$$L_n^k(x) = (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} L_{n+k}(x)$$

(4.14)

ilişkisini kullanarak,

$$(-1)^k \frac{t^k}{(1-t)^{k+1}} \exp\left[-\frac{xt}{(1-t)}\right] = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^k L_n^k(x) t^{n+k}$$

(4.15)

yazar ve nihayet,

$$\frac{\exp\left[-\frac{xt}{(1-t)}\right]}{(1-t)^{k+1}} = \frac{d^k}{dx^k}\sum_{n=0}^{\infty} L_n^k(x)\, t^n$$

(4.16)

olarak istediğiniz neticeyi elde ederiz.

4.3 Asosiye Laguerre Polinomlarının Diğer Özellikleri

Asosiye Laguerre Polinomlarının Rodriguez formülü,

$$L_n^k(x) = \frac{e^x x^{-k}}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\{e^{-x}x^{n+k}]$$

(4.17)

olarak verilir. Bu polinomların diklik ilişkisi ise,

$$\int_0^{\infty} e^{-x}x^k L_n^k(x) L_m^k(x) dx = \frac{(n+k)!}{n!}\delta_{mn}$$

(4.18)

şeklindedir. Burada ağırlık fonksiyonu

$(e^{-x}x^k)$ (4.19)

olarak alınır.

Asosiye Laguerre polinomlarının sıkça kullanılan rekürans bağıntıları ise;

$$L_{n-k}^{k}(x) + L_{n}^{k-1}(x) = L_{n}^{k}(x) \tag{4.20}$$

$$(n+1)L_{n+1}^{k}(x) = (2n+k+1-x)L_{n}^{k}(x) - (n+k)L_{n-1}^{k}(x) \tag{4.21}$$

$$x\frac{d}{dx}L_{n}^{k}(x) = nL_{n}^{k}(x) - (n+k)L_{n-1}^{k}(x) \tag{4.22}$$

olarak verilebilir[7].

5. UYGULAMA

1.

$$xy'' + (1 - x)y' + \lambda y = 0.$$

Yukarıda Laguerre diferansiyel denklem verilmiştir. $x = 0$'ın singular nokta olduğunu gösteriniz ve denklemi çözünüz.

$$\lim_{x\to 0} x\frac{1-x}{x} = \lim_{x\to 0} 1 - x = 1$$

ve

$\lim_{x\to 0} x^2\frac{\lambda}{x} = \lim_{x\to 0} \lambda x = 0$ olduğundan $x = 0$ noktası singülar noktadır. Seri çözüm deneyecek olursak;

$$y(x) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{s+r}$$

$$y'(x) = \sum_{r=0}^{\infty} (s+r)a_r x^{s+r-1}$$

$$y''(x) = \sum_{r=0}^{\infty} (s+r)(s+r-1)a_r x^{s+r-2}$$

Denklemde yerine yazalım;

$$0 = x\sum_{r=0}^{\infty} (s+r)(s+r-1)a_r x^{s+r-2} + (1-x)\sum_{r=0}^{\infty} (s+r)a_r x^{s+r-1} + \lambda\sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{s+r}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} (s+r)(s+r-1)a_r x^{s+r-1} + \sum_{r=0}^{\infty} (s+r)a_r x^{s+r-1} - \sum_{r=0}^{\infty} (s+r)a_r x^{s+r}$$

$$+ \sum_{r=0}^{\infty} \lambda a_r x^{s+r}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} [(s+r)(s+r-1) + (s+r)]a_r x^{s+r-1} + \sum_{r=0}^{\infty} [\lambda - (s+r)]a_r x^{s+r}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} (s+r)^2 a_r x^{s+r-1} + \sum_{r=0}^{\infty} [\lambda - s - r]a_r x^{s+r}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} (s+r)^2 a_r x^{s+r-1} + \sum_{r=0}^{\infty} [\lambda - s - r - 1] a_{r-1} x^{s+r-1}$$

$$= s^2 a_0 x^{s-1} + \sum_{r=0}^{\infty} (s+r)^2 a_r x^{s+r-1} + \sum_{r=0}^{\infty} [\lambda - s - r - 1] a_{r-1} x^{s+r-1}$$

$$= s^2 a_0 x^{s-1} + \sum_{r=0}^{\infty} (s+r)^2 a_r + [[\lambda - s - r - 1] a_{r-1}] x^{s+r-1}$$

İndis denklemine göre $s^2 = 0$ bu durumda kökler $s_1 = s_2 = 0$ ve tekrarlama bağıntısınında,

$$0 = (s+r)^2 a_r + (\lambda - s - r + 1) a_{r-1}$$

$$= r^2 a_r + (\lambda - s + 1) a_{r-1} \qquad s = 0 \text{ olduğundan,}$$

$$a_r = \frac{(r-1-\lambda) a_{r-1}}{r^2} \qquad r \geq 1$$

a_0 keyfi seçilir.

$$a_1 = -\frac{\lambda}{1^2} a_0 = -\frac{\lambda}{(1!)^2} a_0$$

$$a_2 = \frac{1-\lambda}{2^2} a_1 = -\frac{\lambda(1-\lambda)}{(2!)^2} a_0$$

$$a_3 = \frac{2-\lambda}{3^2} a_2 = -\frac{\lambda(1-\lambda)(2-\lambda)}{(3!)^2} a_0$$

...

$$a_n = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(k-\lambda)}{(n!)^2}$$

Böylece Laguerre Denkleminin çözümü;

$$y_1(x) = a_0 (1 + \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(k-\lambda)}{(n!)^2} x^n)$$

Eğer $\lambda = m \in N$ olduğunda formüllere göre serinin katsayıları;

$$0 = a_{m+1} = a_{m+2} \ldots = a_{m+k} = \cdots$$

olur ve $y_1(x)$ x'in m'den küçük veya ona eşit kuvvetlerini içerir. Başka bir deyişle polinom en fazla m derecesini alabilir.

2.

$$\mathrm{xy}'' + (\propto +1 - \mathrm{x})\mathrm{y}' + \mathrm{my(x)} = 0$$

Yukarıda Asosiye Laguerre diferansiyel denklemi verilmiştir. $\propto > -1$ olduğu bilindiğine göre $L_0^\propto, L_1^\propto, L_2^\propto, L_3^\propto$ Asosiye Laguerre diferansiyel denklemlerini hesaplayınız.

Asosiye Laguerre diferansiyel denklemlerini,

$$L_n^\propto = \sum_{i=0}^{m} \binom{m+\propto}{m-i} \frac{x^k}{i!}$$

Formülü ile hesaplayabiliriz.

$$L_0^\propto = 1$$

$$L_1^\propto = -x + \propto +1$$

$$L_2^\propto = \frac{x^2}{2} - (\propto +)x + \frac{(\propto +2)(\propto +1)}{2}$$

$$L_3^\propto = -\frac{x^3}{6} + \frac{(x+3)x^2}{2} - \frac{(\propto +2)(\propto +3)}{2} + \frac{(\propto +3)(\propto +2)(\propto +1)}{6}$$

6. SONUÇ

Bitirme çalışması konum olan Laguerre polinomları 1934 yılı doğumlu olan Edmond Laguerre tarafından ilk kez, Laguerre denklemlerinin çözümü olan Laguerre fonksiyonları ile ilgili çalışması ile 1879'da yayınlamıştır. Özel fonksiyonlar, neredeyse, bütün teknik, fizik ve matematik bilim dallarında meydana çıkan diferansiyel denklemleri çözerken karşılaşılan standart fonksiyonlardır. İşte bu özel fonksiyonlardan biri olan Laguerre Polinomları, Laguerre denklemlerinin çözümünde bize yardımcı olur.

Bu özel fonksiyon türünü anlamak adına öncelikle denklemlerin çözüm yollarını ve fonksiyonların ortogonalliğini iyi incelemek gerekmektedir. İncelenen başlıkların öncülüğünde Lineer diferansiyel denklemlerin karışık sınırları altında çözümü için kullanılan Laguerre Polinomları bu çalışma ile detaylıca anlatılmaya çalışılmıştır. Çeşitli çözüm yollarına değinilerek bu bağlamda kullanılan Rodrigues formülü incelenmiş, rekürans bağıntılarının Laguerre ve Asosiye Laguerre denklemlerin çözümünde kullanımı gösterilmiştir. Son olarak Frobenius yöntemi ile bir uygulama yapılmış ve konu pekiştirilmiştir.

KAYNAKÇA

[1] Andrews, G.E., Askey, R. and Roy, R. 1999. Special Functions. Cambridge University Press, 664 p., United Kingdom

[2] Rainville, E.D. 1965. Special Functions. The Macmillan Company, 365 p., New York.

[3] Güngör F. (1995), Diferansiyel Denklemler, Beta Yayıncılık, İstanbul

[4] Al-Salam, N.A. 1984. Some operational formulas for the q-Laguerre polynomials.Fibonacci Quart. 22, no.2, 166-170.

[5] Szegö, G. 1939. Orthogonal Polynomials. American Mathematical Society, 405 p., New York.

[6] R. Koekoek : Generalizations of Laguerre (type) polynomials. Delft University of Technology, Faculty of Mathematics and Informatics, Report no. 87-58, 1987.

[7] Lebedev, N.N.1965, Special Functions and their Applications, Prentice Hall Inc.

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad	Fethi Fırat TÜLÜ
Doğum Tarihi	25.07.1995
Doğum yeri	Lüleburgaz/Kırklareli
Lise	2009- 2013 Lüleburgaz Lisesi
Staj Yaptığı Yerler	Garanti Emeklilik ve Hayat A.Ş -İstanbul-
	Cimri.com -İstanbul-
	Gtech Veri Teknolojileri Akademisi -İstanbul-
	LeasePlan -İstanbul-